

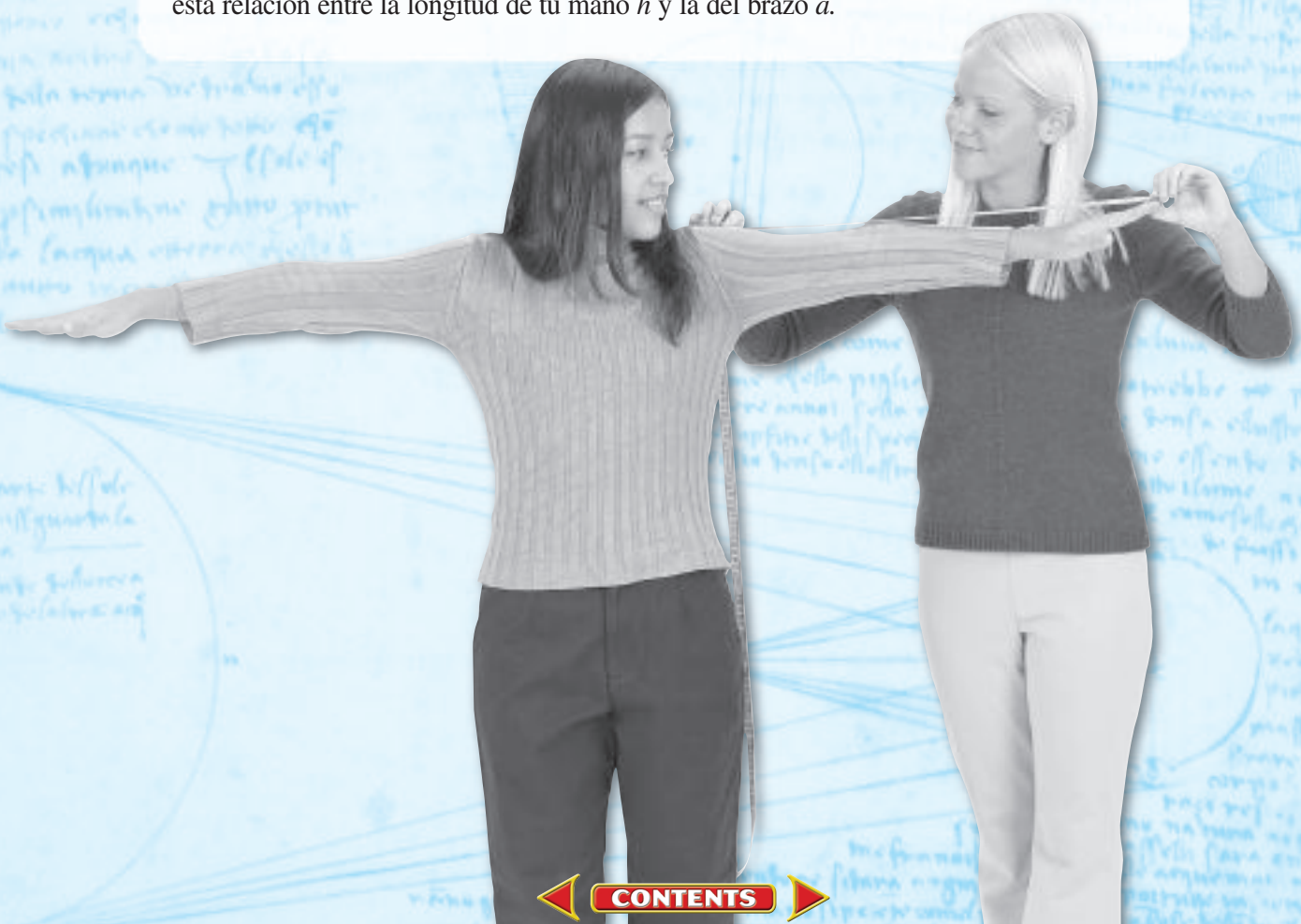
CAPÍTULO 1

Relaciones lineales

Matemáticas en la vida diaria

Es natural Las relaciones lineales pueden observarse en una gran variedad de situaciones comunes en la naturaleza. Uno de los más famosos artistas del Renacimiento, Leonardo da Vinci, creía que en un cuerpo perfecto, las relaciones entre sus diferentes partes debían obedecer ciertas proporciones. Por ejemplo, la longitud del brazo debía medir tres veces el tamaño de la mano y la longitud del pie debía ser seis veces mayor que la longitud del dedo gordo del pie. Estas relaciones se pueden expresar con las ecuaciones lineales: $a = 3h$, donde a es la longitud del brazo y h es la longitud de la mano y con $f = 6t$, donde f es la longitud del pie y t es la longitud del dedo gordo.

Piensa al respecto Calcula con una cinta de medir la longitud de tu brazo y la de tu mano. ¿Cuál es la razón entre estas dos longitudes? Escribe una ecuación que exprese esta relación entre la longitud de tu mano h y la del brazo a .



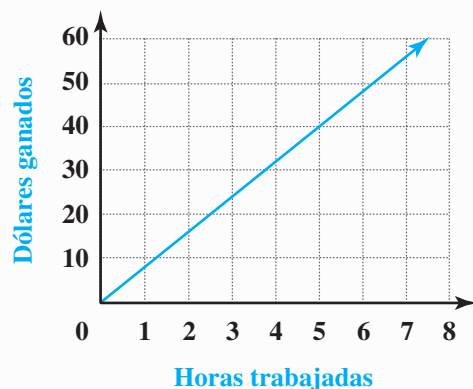
Carta a la familia

Estimados alumno(a) y familiares:

Vamos a empezar un año muy emocionante con las matemáticas. En el primer capítulo, estudiaremos *relaciones lineales*, el tipo de relaciones que ocurren cuando una cantidad o variable cambia a una tasa constante, a medida que cambia una segunda variable.

Por ejemplo, Lara gana \$8 por hora. Ésta es una relación lineal entre el número de *horas trabajadas* (H) y la variable *dólares ganados* (D). Por cada hora que trabaja Lara, su salario aumenta \$8. Esta relación se puede expresar algebraicamente como $D = 8 \times H$ o $D = 8H$.

Aprenderemos a reconocer relaciones lineales representadas mediante tablas, reglas algebraicas o gráficas. La gráfica de una ecuación lineal siempre es una recta. Por lo tanto, el examen de su gráfica permite obtener mucha información sobre la relación.



Horas	Dólares ganados
0	0
1	8
2	16
3	24
4	32

Muchas situaciones cotidianas se pueden representar con funciones lineales: el costo de varios cedés, si cada uno cuesta \$15; el número de millas recorridas, si se viaja a 40 millas por hora. En algunas ocasiones, la relación no es exactamente lineal, pero es lo suficientemente cercana como para poder representarla con un modelo lineal y, de este modo, obtener predicciones y estimados.

Vocabulario Aprenderemos varios términos nuevos a lo largo de este capítulo:

coeficiente

pendiente

directamente proporcional

forma pendiente-

intersección

variación directa

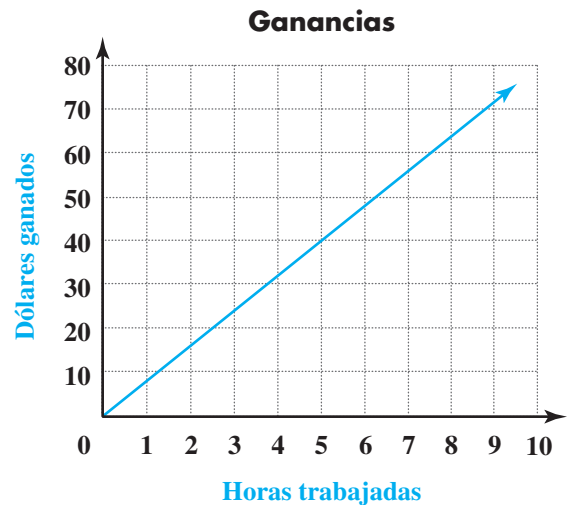
intersección y

relación lineal

¿Qué pueden hacer en el hogar?

Pueden jugar con su hijo(a) a buscar relaciones lineales en situaciones cotidianas, así como a calcular estimados y a hacer predicciones basadas en dichas relaciones. Si su hijo(a) puede mecanografiar 40 palabras por minuto, ¿cuánto tardará en escribir un informe sobre un libro? ¿Cuántas horas deberá trabajar cuidando niños para ganar \$100, si le pagan \$4 por hora? Tal vez el conocimiento de las relaciones lineales ayuden a los hijos a administrar su dinero y a aprender a ahorrar.

Lara gana \$8 por hora en su trabajo de verano. Hizo esta gráfica para mostrar la relación entre el número de horas que trabaja y el número de dólares que gana.



El álgebra es una herramienta útil para investigar las relaciones entre *variables* o cantidades que varían. La gráfica de Lara muestra que hay una relación entre la variable *horas trabajadas* y la variable *dólares ganados*.

La gráfica de esta relación es una recta. Una gráfica lineal indica una tasa de cambio *constante*. En la gráfica, al aumentar el número de horas por 1, el número de dólares ganados aumenta en 8. A las relaciones con gráficas lineales se las llama **relaciones lineales**.

VOCABULARIO

relación lineal

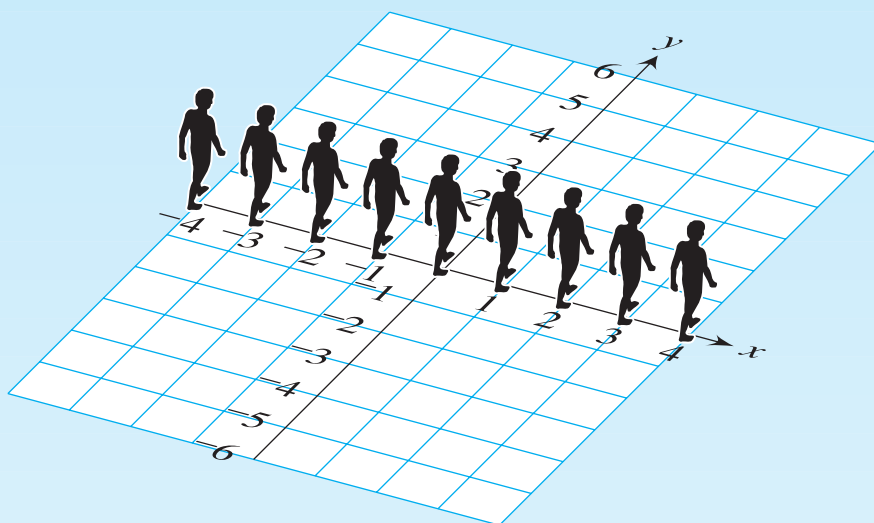
En este capítulo, vas a explorar gráficas, tablas y ecuaciones para relaciones lineales. Empezarás por hacer una “gráfica humana”.

Explora

Selecciona un equipo de nueve alumnos para hacer la primera gráfica. El equipo debe seguir estas reglas:

- Alinearse a lo largo del eje x . Un alumno debe pararse en -4 , otro en -3 , y así sucesivamente hasta el 4.
- Multiplicar el número en que estás parado por 2.

- Cuando tu maestro(a) diga “¡Adelante!”, avanza o retrocede hacia el valor y igual al resultado que hallaste en el paso anterior.



Describe la “gráfica” resultante.

Con los alumnos del primer equipo en el lugar en que están, selecciona otro equipo de nueve alumnos. El segundo equipo debe seguir estas reglas:

- Alinearse a lo largo del eje x . Un alumno debe colocarse en -4 , otro en -3 , y así sucesivamente hasta el 4 .
- Multiplica el valor en que estás parado por 2 y después súmalo 3 .
- Cuando tu maestro(a) diga “¡Adelante!”, avanza o retrocede hacia el valor y igual al resultado que hallaste en el paso anterior. Es posible que tengas que caminar alrededor de alguien del primer equipo.

¿Son lineales ambas gráficas?

¿Pasa alguna de las gráficas por el origen? De ser así, ¿cuál?

Escribe una ecuación para cada gráfica.

Explica por qué nunca se intersecan las dos gráficas.

Investigación 1 Variación lineal directa

Las dos gráficas humanas que creaste ilustran dos tipos de relaciones lineales, las cuales investigarás en las siguientes series de problemas.

Serie de problemas A

Un fin de semana, Mikayla repartió folletos que explicaban el nuevo programa de reciclaje de su pueblo.



1. Copia y completa la tabla para mostrar el número de folletos que Mikayla repartió en el tiempo que trabajó el domingo.

Horas que trabajó el domingo, h	0	1	2	3	4	5	6
Repartos del domingo, s	0	150					
Total de repartos, t	350						

2. Observa tu tabla completa.

- a. A medida que las horas que trabajó Mikayla se duplican de 1 a 2, ¿también se duplica el número de repartos del domingo? A medida que las horas que trabajó Mikayla se duplican de 2 a 4, ¿también se duplicó el número de repartos del domingo?
- b. A medida que las horas se duplicaron de 1 a 2, ¿también se duplicó el número total de repartos del domingo? A medida que las horas que se duplicaron de 2 a 4, ¿se duplicó también el número total de repartos?
- c. A medida que las horas trabajadas se triplicaron de 1 a 3, ¿también se triplicó el número de repartos del domingo? A medida que las horas se triplicaron de 2 a 6, ¿se triplicó también el número de repartos del domingo?
- d. Al triplicarse las horas trabajadas de 1 a 3, ¿también se triplicó el número total de repartos? A medida que las horas trabajadas se triplicaron de 2 a 6, ¿se triplicó también el número total de repartos?

3. Observa las dos primeras filas de tu tabla. Escribe una ecuación que describa la relación entre el número de repartos del domingo, s , y el número de horas trabajadas el domingo, h .
4. Observa la primera y la tercera filas de tu tabla. Escribe una ecuación que describa la relación entre el número total de repartos, t , y el número de horas trabajadas el domingo, h .

VOCABULARIO

directamente proporcional

Piensa cómo se relaciona el número de horas que trabajó Mikayla y el número de repartos del domingo. Cuando multiplicas el valor de una variable por una cantidad como 2, 30 ó 150, el valor de la otra variable se multiplica por la misma cantidad. Eso significa que el número de folletos repartidos es **directamente proporcional** al número de horas trabajadas.

Otra manera de decir esto es que la razón de los repartos del domingo con respecto a las horas trabajadas es constante:

$$\frac{\text{Repartos del domingo}}{\text{horas}} = \frac{s}{h} = \frac{150}{1} = \frac{300}{2} = \frac{450}{3} = 150$$

VOCABULARIO

variación directa

Una relación lineal en que dos variables son directamente proporcionales es una **variación directa**. La ecuación para cualquier variación directa se puede escribir en la forma $y = mx$, donde x y y son variables y m es una constante.

No todas las relaciones lineales son variaciones directas. Por ejemplo, aunque la relación entre el número de horas que trabajó Mikayla y el número total de repartos es lineal, ésta *no* es una variación directa.

Ahora, examinarás las gráficas de las relaciones con relación a los repartos de folletos de Mikayla.

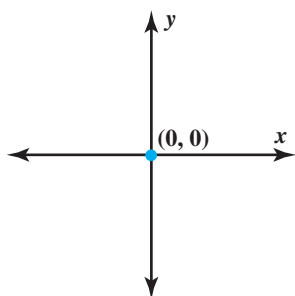


Serie de problemas B



Recuerda

El origen es el punto $(0, 0)$.



1. En una cuadrícula como la siguiente, grafica la ecuación que escribiste en la Serie de problemas A. Muestra la relación entre el número de horas que trabajó Mikayla y el número de repartos del domingo. Rotula la gráfica con su ecuación.



2. En la misma cuadrícula, grafica la ecuación que escribiste. Muestra la relación entre el número de horas que trabajó Mikayla y el número total de repartos.
3. ¿En qué se parecen estas gráficas? ¿En qué difieren?
4. Piensa acerca de la situación que representa cada gráfica.
 - a. Explica por qué la gráfica para los repartos del domingo pasa a través del origen.
 - b. ¿Por qué la gráfica del número total de repartos no pasa a través del origen?
5. Explica por qué nunca se intersecarán las gráficas.
6. La ecuación para el número de folletos repartidos el domingo es $s = 150h$.
 - a. ¿Qué representa el 150 en la situación?
 - b. Si cambias 150 por 100, ¿cómo afectaría esto la gráfica?
 - c. Si cambias 150 por 200, ¿cómo afectaría esto la gráfica?
7. ¿Debe la gráfica de una variación directa pasar a través del origen? Explica.

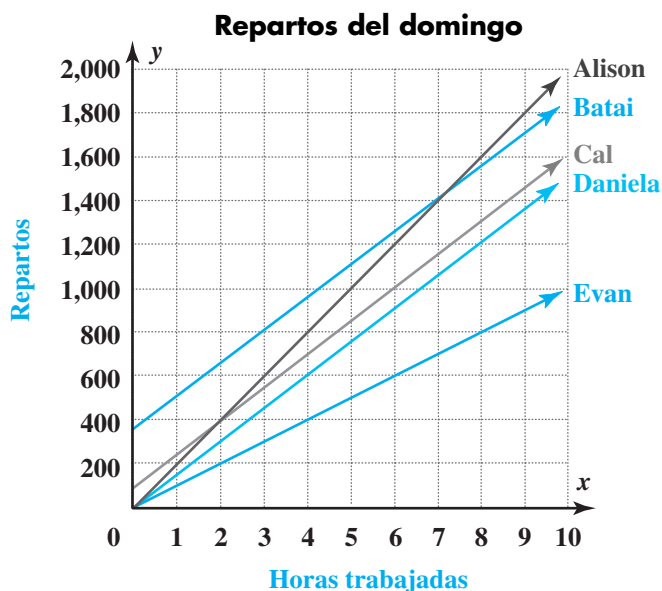
Serie de problemas C



Recuerda

Una relación es una *variación directa*, si cuando el valor de una variable se multiplica por una cantidad, el valor de la otra variable se multiplica por la misma cantidad.

Estas gráficas muestran la relación entre el número de folletos repartidos y el número de horas que trabajaron cinco alumnos.



1. ¿De quiénes son las gráficas que muestran la misma tasa de reparto? Explica cómo lo sabes.
2. ¿De quiénes son las gráficas que muestran una variación directa? Explica cómo lo sabes.
3. ¿De quiénes son las gráficas que muestran una relación que no es una variación directa? Explica cómo lo sabes.

Comparte & resume

1. Describe en palabras dos situaciones lineales más; una debe ser una variación directa y otra no.
2. ¿En qué diferirán las gráficas de las dos relaciones?
3. ¿En qué serán diferentes las ecuaciones de las dos relaciones?

Investigación 2 Relaciones lineales que disminuyen

En la Investigación 1, observaste cómo el número de folletos que Mikayla entregó aumentó con cada hora que ella trabajó. Ahora, examinarás esta situación con un enfoque diferente:

Mikayla empezó con una pila de folletos para repartir. Por cada hora que trabajó, el número de folletos en su pila disminuyó.

MATERIALES
papel cuadriculado

Serie de problemas D

Supón que Mikayla empezó con 1,000 folletos. El sábado repartió 350 y el domingo repartió los que le quedaban, a una tasa constante de 150 por hora.

1. ¿Cuántos folletos tenía Mikayla para repartir cuando empezó a trabajar el domingo?
2. Copia y completa la tabla para mostrar el número de folletos que Mikayla tenía para repartir, después de cada hora de trabajo el domingo.

Horas trabajadas el domingo, h	0	1	2	3	4
Folletos restantes, r					

3. Escribe una ecuación para describir la relación entre el número de folletos que quedan, r , y el número de horas trabajadas el domingo, h .
4. ¿Después de cuántas horas se le acabaron los folletos a Mikayla? Explica cómo hallaste la respuesta.
5. Traza una gráfica de tu ecuación. ¿Es lineal la relación?
6. ¿En qué se diferencia tu gráfica de las gráficas que hiciste en la Investigación 1? ¿Qué hay en esta situación que causa la diferencia?
7. ¿Es el número de folletos que quedan directamente proporcional al número de horas que trabajó Mikayla el domingo? Es decir, ¿es esta relación una variación directa? Explica cómo lo sabes.

8. Considera la ecuación que escribiste en el Problema 3.
- En tu ecuación, debes haber sumado $-150h$ o restado $150h$. ¿Qué indica el símbolo negativo antes de $150h$ acerca de la situación? ¿Cómo afecta esto la gráfica?
 - Tu ecuación también debe haber tenido el número 650. ¿Qué indica el 650 acerca de la situación? ¿Cómo afecta esto la gráfica?
9. Lucita repartió folletos más lentamente que Mikayla. Empezó con 1,000 folletos, repartió 200 el sábado y después repartió 100 folletos por hora el domingo. Escribe una ecuación para la relación entre el número de horas que Lucita trabajó el domingo y el número de folletos que le quedaron.

Usarás lo que has aprendido acerca de las relaciones lineales que disminuyen al trabajar en la siguiente serie de problemas.

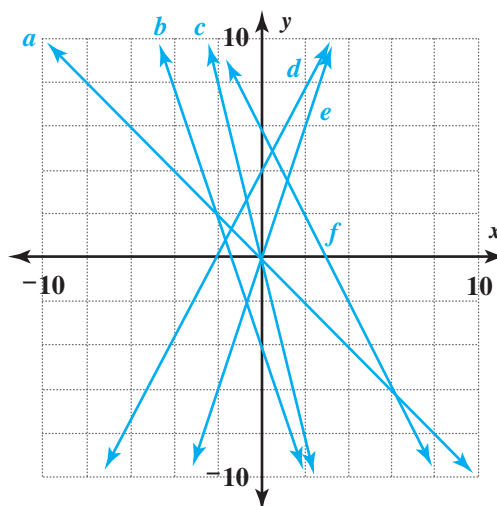
Serie de problemas E

- Inventa una situación que presente una relación lineal que disminuye. Tu situación no debe ser una variación directa.
 - Describe tu situación en palabras.
 - Describe tu situación con una tabla.
 - Describe tu situación con una ecuación.
 - Describe tu situación con una gráfica.
- Reto** Inventa una situación que presente una relación lineal que disminuye que sea una variación directa.



Comparte & resume

Considera estas seis gráficas.



Ordena las gráficas en grupos, por lo menos de dos maneras. Explica los criterios para cada uno de tus grupos.

Investigación

3

Reconoce la variación directa

En esta investigación, practicarás la identificación de variaciones directas, al examinar descripciones escritas, gráficas, tablas y ecuaciones.

Piensa & comenta

¿Cómo sabes si una relación es lineal

- a partir de su ecuación?
- a partir de una tabla de valores?
- a partir de una descripción en palabras?

Serie de problemas **F**

Cada uno de los Problemas 1 al 4 describe cómo la cantidad de dinero en una cuenta bancaria cambia con el tiempo. Para cada problema, haz las Partes a, b y c.

- a.** Determina cuál de estas descripciones se ajusta a la relación:
 - una variación directa
 - lineal pero no una variación directa
 - no lineal
 - b.** Explica cómo decidiste qué tipo de relación se describe.
 - c.** Si la relación es lineal, escribe una ecuación para ésta.
- 1.** Al comienzo de las vacaciones escolares, Evan no tenía nada en el banco. Entonces, empezó un trabajo de medio tiempo y depositó \$25 cada semana.
 - 2.** Al comienzo de sus vacaciones, Tamika tenía \$150 en el banco. Cada semana depositó otros \$25.
 - 3.** Al comienzo de las clases, Ben tenía en el banco \$150 que había ganado durante el verano. Durante la primera semana de clases retiró una quinta parte de sus ahorros o \$30. Durante la segunda semana de clases retiró un quinto de los \$120 que le quedaban. Cada semana, continuó retirando un quinto de lo que le quedaba en la cuenta.
 - 4.** Al comienzo de las clases, Diego tenía \$150 en el banco. Cada semana retiró \$25.

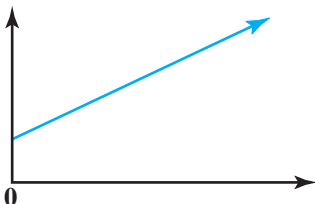


Serie de problemas G

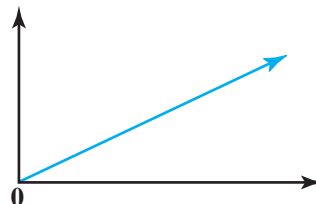
Para cada gráfica, determina cuál de las descripciones se ajusta a la relación y explica cómo lo sabes:

- una variación directa
- lineal pero no una variación directa
- no lineal

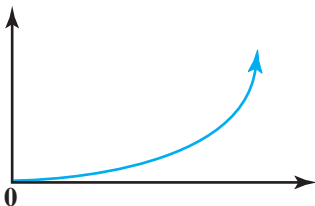
1.



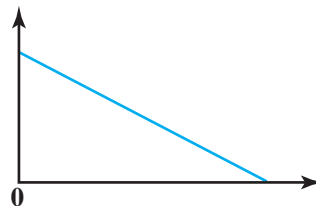
2.



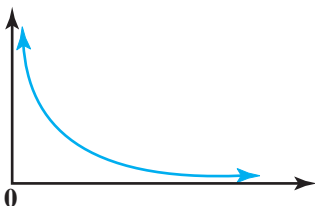
3.



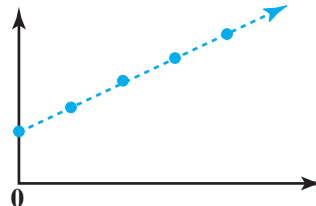
4.



5.



6.



Serie de problemas H

Para cada ecuación, determina cuál de las descripciones se ajusta a la relación y explica cómo lo sabes:

- una variación directa
- lineal pero no una variación directa
- no lineal

1. $y = 6p$

2. $y = 6p + 1$

3. $s = 5.3r$

4. $s = 5.3r - 2$

5. $t = 4s^2$

6. $y = 12 - 5p$

7. $y = \frac{5p}{2}$

8. $y = \frac{5}{2p}$

Serie de problemas

Para los Problemas 1 al 4, haz las Partes a y b.

- a. Determina si la tabla podría describir una relación lineal. Explica cómo lo sabes.
- b. Si la relación podría ser lineal, determina si es una variación directa. Explica cómo lo decidiste.

1.

x	1	2	3	4	5
y	3	7	11	15	19

2.

u	1	2	3	4	5
w	1	3	9	27	81

3.

p	2	4	6	8	10
q	26	46	66	86	106

4.

t	2	6	9	10	25
r	6	18	27	30	75

Comparte & resume

Copia y completa la tabla indicando cómo puedes identificar cada tipo de relación para cada tipo de representación.

Relación	Palabras	Gráfica	Ecuación	Tabla
no lineal	sin tasa de cambio constante			
variación directa		una recta que pasa por el origen		
lineal pero no una variación directa			se puede representar en la forma $y = mx + b$ con $b \neq 0$	

Ejercicios por tu cuenta

Practica & aplica



Recuerda

Al graficar un par ordenado, traza el primer número en el eje horizontal y el segundo número en el eje vertical.

1. Carlos y Shondra estaban diseñando carteles para la obra de teatro de la escuela. Durante los dos primeros días, crearon 40 carteles. Para el tercer día, habían establecido una rutina y calcularon que juntos producirían 20 carteles en una hora.

- a. Haz una tabla como la siguiente que muestre cuántos carteles crean Carlos y Shondra hasta el tercer día.

Horas trabajadas, h								
Carteles hechos, p								

- b. Haz una gráfica para representar el número de carteles que crearán Carlos y Shondra trabajando hasta el tercer día.
- c. Escribe una ecuación para representar el número de carteles que crearán trabajando hasta el tercer día.
- d. Haz una tabla para mostrar el *número total* de carteles que tendrán el tercer día.

Horas trabajadas, h								
Carteles hechos, t								

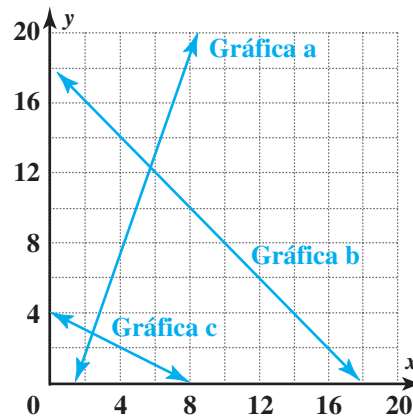
- e. Haz una gráfica para mostrar el número total de carteles que crearán Carlos y Shondra trabajando hasta el tercer día.
- f. Escribe una ecuación que te permita calcular el número total de carteles que tendrán, basándote en el número de horas que trabajan.
- g. Explica cómo el describir solo el número de carteles creados el tercer día es diferente a describir el número total de carteles creados. ¿Está involucrada la variación directa? ¿Cómo se representan estas diferencias en las tablas, las gráficas y las ecuaciones?



- 2. Economía** La compañía de compras por correo Glitz cobra \$1.75 la libra por los gastos de flete en los pedidos de los clientes.

La compañía de compras por correo Lusterless cobra \$1.50 la libra por los gastos de flete, más una tarifa fija de \$1.25 por todo pedido.

- Para cada compañía, haz una tabla que muestre los costos de flete para artículos de diferentes pesos, en números enteros de 1 a 10 libras.
 - Escribe una ecuación para cada compañía para ayudar a calcular cuánto pagarías por flete, C , en un pedido de cualquier peso, W .
 - Haz gráficas para tus ecuaciones y rotula cada una con el nombre de la compañía correspondiente.
 - ¿Cuál compañía ofrece la mejor oferta de flete?
 - Describe cómo te podrían ayudar a contestar la Parte d las gráficas que hiciste.
 - ¿Cómo tendría que cambiar la compañía Lusterless sus tarifas para hacerlas variar directamente con el peso del pedido de un cliente?
- 3.** Marcus repartió anuncios publicitarios el pasado fin de semana. Distribuyó 400 hojas el sábado y 200 por hora el domingo.
- Escribe una ecuación para la relación entre el número de horas que Marcus trabajó el domingo, h , y el número de anuncios, s , que repartió el domingo.
 - Escribe una ecuación para la relación entre el número de horas que Marcus trabajó el domingo, h , y el número total de repartos, t .
- 4.** ¿Cuál de las gráficas representa relaciones que disminuyen? Explica cómo lo sabes.



5. ¿Cuál de estas tablas representa relaciones que disminuyen? Explica cómo lo sabes.

Tabla A

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	19	18	17	16	15	14	13	12	11

Tabla B

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	-2	1	4	7	10	13	16	19	22

Tabla C

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	1.5	1	0.5	0	-0.5	-1	-1.5	-2	-2.5

6. ¿Cuál de estas ecuaciones representa relaciones que disminuyen? Explica cómo lo sabes.

a. $y = -x + 20$

b. $y = 3x - 5$

c. $y = -\frac{1}{2}x + 2$

7. Aquí se describen en palabras cinco relaciones lineales, ecuaciones, tablas y gráficas para cinco compañías. Determina qué ecuación, tabla y gráfica corresponde con cada descripción y después indica si la relación es una variación directa o no. Anota tus respuestas en una tabla como la siguiente.

Compañía	Número de la ecuación	Número de la tabla	Número de la gráfica	Tipo de relación
Rent You Wrecks				
Get You There				
Internet Cafe				
Talk-a-Lot				
Walk 'em All				

Descripciones de las compañías

- La agencia de alquiler de autos *Rent You Wrecks* cobra \$0.25 por milla más \$3.00 por día.
- La compañía de taxis *Get You There* le cobra a un pasajero \$2.00, más \$0.10 por milla.
- La compañía *Internet Cafe* cobra \$5.00 al mes, más \$0.30 por minuto de tiempo de conexión.
- La compañía telefónica *Talk-a-Lot* cobra \$0.75 por llamada, más \$0.10 por minuto.
- El servicio de pasear mascotas *Walk 'em All* cobra \$0.10 por minuto por cuidar a tu perro.

Ecuaciones

- i. $y = 0.3x + 5$
- ii. $y = 0.25x + 3$
- iii. $y = 0.1x + 2$
- iv. $y = 0.1x$
- v. $y = 0.1x + 0.75$

Tablas

i.	x	1	2	3	4	5	6
	y	0.85	0.95	1.05	1.15	1.25	1.35

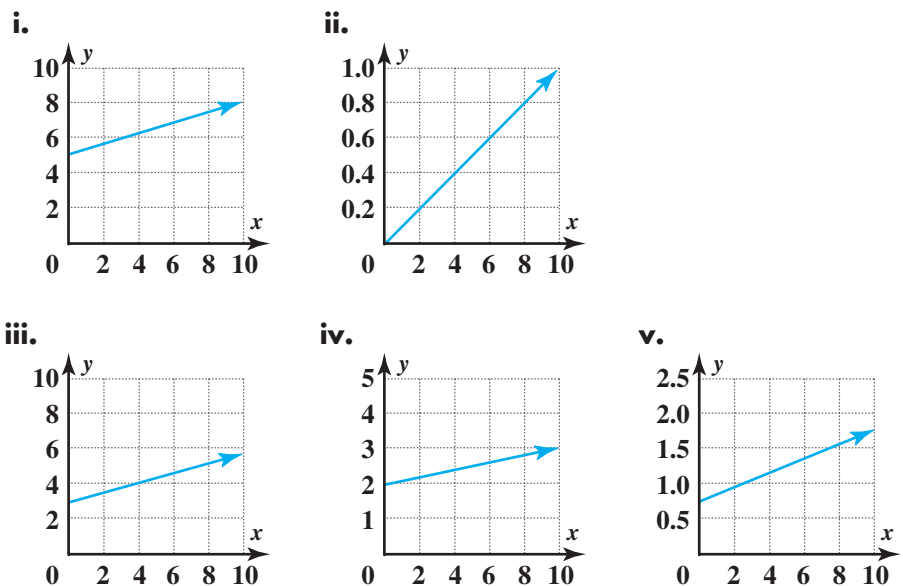
ii.	x	1	2	3	4	5	6
	y	2.10	2.20	2.30	2.40	2.50	2.60

iii.	x	1	2	3	4	5	6
	y	3.25	3.50	3.75	4.00	4.25	4.50

iv.	x	1	2	3	4	5	6
	y	5.30	5.60	5.90	6.20	6.50	6.80

v.	x	1	2	3	4	5	6
	y	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6

Gráficas



El cráter del volcán Cráter Haleakala, en la isla de Maui, como todas las islas hawaianas, fue creado totalmente de lava.

8. Kai está de excursión en el Cráter Haleakala en la isla de Maui. Camina a un paso constante de 4 kph (kilómetros por hora) la primera hora. Después, llega a la parte más escarpada del camino y decelera su paso a 2 kph, durante las siguientes 2 horas. Finalmente, llega a la cima del largo ascenso y durante las siguientes 2 horas camina cuesta abajo, a una velocidad de 6 kph.
- a. Haz una gráfica del paseo de Kai, que muestre la distancia recorrida d y las horas que caminó h . Coloca la distancia recorrida en el eje vertical.
 - b. ¿Representa la gráfica una relación lineal?
9. Un avión azul atraviesa el país a una velocidad constante de 400 millas por hora.
- a. ¿Es lineal la relación entre las horas de vuelo y la distancia recorrida?
 - b. Escribe una ecuación y traza una gráfica para mostrar la relación entre la distancia y las horas que viajó el avión azul.
 - c. Un avión rojo, más pequeño, comienza a volar tan rápidamente como puede, a 400 millas por hora. A medida que viaja quema combustible y se hace más liviano. Entre más combustible quema, más rápidamente vuela. ¿Será lineal la relación entre las horas de vuelo y la distancia recorrida por el avión rojo? Explica tu respuesta.
 - d. En los ejes de la Parte b, traza una gráfica de cómo crees que se vería la relación entre la distancia y las horas recorridas por el avión rojo.

10. Tres buceadores de la marina están atrapados en un submarino experimental en un lugar remoto. Enviaron un mensaje por radio al comandante de la base, para pedir ayuda y más oxígeno. Pueden usar el radio para transmitir una señal que ayude a localizarlos, pero le queda poca carga a la batería. El comandante de la base envía estos tres vehículos para ayudarles:

- un helicóptero que viaja a 45 millas por hora y está a 300 millas del submarino
- un vehículo todo terreno que puede viajar a 15 millas por hora y está a 130 millas del submarino
- un bote que puede viajar a 8 millas por hora y está a 100 millas del submarino

Cada vehículo se aproxima desde una dirección diferente. El comandante necesita seguirle la pista del vehículo que llegará primero al submarino, de manera que pueda indicarle al submarino que dirija la antena del radio hacia ese vehículo.

- a. Para ayudar al comandante de la base, crea tres gráficas en un conjunto de ejes que muestren la distancia a la que está cada vehículo del submarino con el paso del tiempo. Coloca el tiempo en el eje horizontal y rotula cada gráfica con el nombre del vehículo.
- b. Usa tus gráficas para determinar cuándo debe el comandante indicarle al submarino que dirija su antena hacia el helicóptero, el vehículo todo terreno y el bote.
- c. Para cada gráfica, escribe una ecuación que el comandante podría usar para determinar la distancia exacta d a la que está cada vehículo del submarino en el tiempo h .

11. Un día, Lydia caminó de Allentown a Brassville a una velocidad constante de 4 kilómetros por hora. Los pueblos están a 30 kilómetros de distancia.

- a. Escribe una ecuación para la relación entre la distancia, d , que recorrió Lydia y las horas, h , que caminó.
- b. Grafica tu ecuación para mostrar la relación entre las horas caminadas y la distancia recorrida. Coloca la distancia recorrida en el eje vertical.
- c. ¿Cuántas horas le tomó a Lydia llegar a Brassville?
- d. Ahora, escribe una ecuación para la relación entre las horas caminadas, h , y la distancia, r , que le queda por caminar.
- e. Grafica la ecuación que escribiste en la Parte d en el mismo conjunto de ejes que usaste para la Parte b. Rotula el eje vertical tanto para d como para r .
- f. ¿Cómo puedes usar tu gráfica de la Parte e para determinar cuántas horas le tomó a Lydia llegar a Brassville?

- 12.** Tres compañías de teléfonos celulares tienen diferentes planes de tarifas para llamadas locales.

- i. Talk-It-Up ofrece tarifas fijas de \$50 por mes. Puedes hablar todo lo que quieras sin cargos adicionales.
- ii. One Thin Dime cobra \$0.10 por cada medio minuto, pero no tiene tarifa fija.
- iii. CellBell cobra \$30 por mes y después \$0.10 por minuto por todas las llamadas hechas.



- a. Para cada compañía, escribe una ecuación que relacione el costo del servicio telefónico, c , con el número de minutos, t , que un cliente habla durante un mes.
- b. Cualquier ecuación lineal se puede escribir en la forma $y = mx + b$. Da el valor de m y de b para cada ecuación que escribiste en la Parte a.
- c. Para cada compañía, haz una gráfica que relacione el costo del servicio telefónico con el número de minutos que un cliente habla durante un mes.
- d. ¿Dónde aparecen los valores de m y b en la gráfica para cada compañía telefónica?



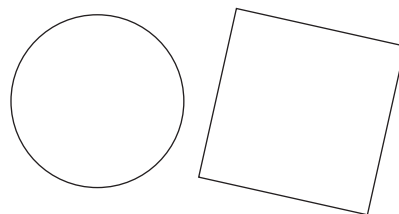
Recuerda

El área de un círculo es el número pi, representado por π , multiplicado por el radio del círculo al cuadrado.

Repaso mixto

- 13. Geometría** Has estudiado fórmulas para calcular el área y el perímetro de varias formas. Algunas de estas fórmulas son lineales y otras no lo son. Indica si la fórmula para cada una de las siguientes medidas es lineal o no y explica tu respuesta.

- a. área de un círculo
- b. circunferencia de un círculo
- c. área de un cuadrado
- d. perímetro de un cuadrado



Usa la propiedad distributiva para volver a plantear cada una de las expresiones sin usar paréntesis.

- 14. $2a(0.5z + z^2)$
- 15. $ab(b^2 - 0.4a^2b)$
- 16. $-2c\left(\frac{2}{c^2} + c^2\right)$
- 17. $pq\left(\frac{1}{p^2} - \frac{q}{p}\right)$

En tus propias palabras

Explica cómo puedes saber si una relación lineal es una variación directa a partir de una descripción escrita, de una ecuación y de una gráfica.

Llena los espacios en blanco para hacer verdaderos los enunciados.

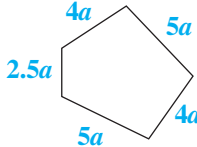
18. $3y = -17y - \underline{\hspace{2cm}}$

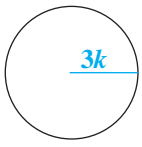
19. $mn^2 - 0.2mn^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

20. $\frac{8}{b} = \underline{\hspace{2cm}} + \frac{9}{b}$

21. $\underline{\hspace{2cm}} - \frac{a^2}{n^2} = 4$

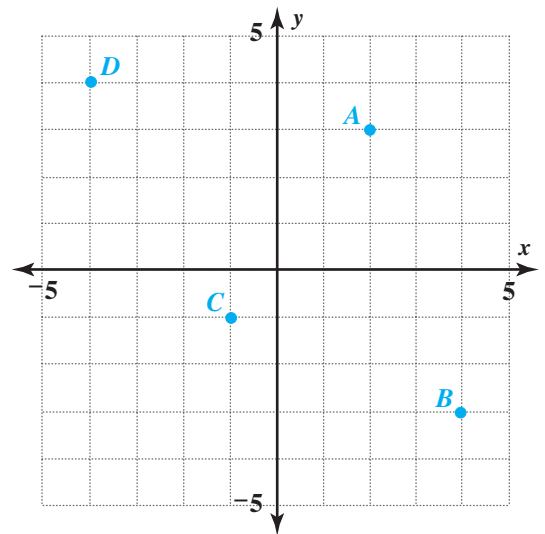
Geometría Calcula el valor de la variable en cada dibujo.

22. 
Perímetro = 61.5

23. 
Área = 56.25π

24. Indica cuántas unidades debes viajar en la dirección x y cuántas unidades en la dirección y , para tomar el camino más corto de un punto al otro.

- a. Punto A al Punto B
- b. Punto B al Punto C
- c. Punto C al Punto D
- d. Punto D al Punto A



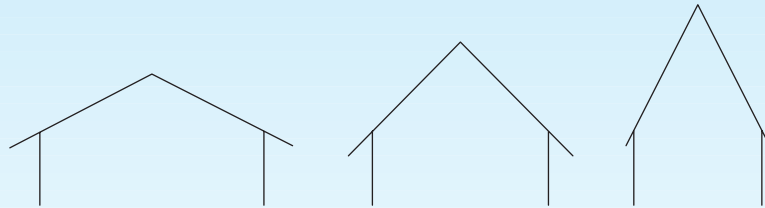
25. Grafica los siguientes puntos en una cuadrícula parecida a la que se muestra y conéctalos en el orden dado.

- (4, -1) (3, -4) (-3, -4) (-5, -1) (-2, -1) (-2, 4)
(1, 2.5) (-1.5, 1.5) (-1.5, -1) (4, -1)

En muchas profesiones, la gente trabaja con el concepto de pendiente. Los ingenieros de carreteras necesitan medir la pendiente de colinas para una autopista propuesta. Los arquitectos necesitan describir la pendiente de un techo o de unos escalones. Los fabricantes de escaleras necesitan probar la estabilidad de una escalera, en relación con su grado de inclinación al reclinarla contra una pared.

Piensa & comenta

Piensa en una de las situaciones que se describieron anteriormente: la pendiente del techo de una casa, que se llama *vertiente* del techo. Supón que quieres describir con precisión la vertiente de cada uno de estos tres techos.



- ¿Ayudaría sólo medir la longitud del techo de la parte de arriba al borde del techo? Explica.
- ¿Puedes pensar en alguna otra manera en que podrías medir la pendiente?

Investigación 1 Describe la pendiente

En esta investigación, vas a explorar una manera común de describir la pendiente.

MATERIALES

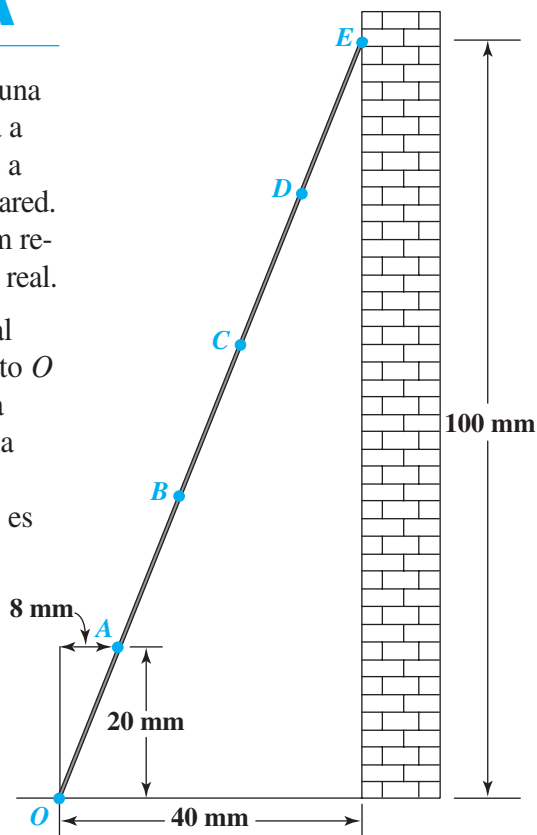
regla métrica

Serie de problemas A

1. Una escalera está apoyada en una pared, la parte posterior queda a una altura de 10 pies y la base a una distancia de 4 pies de la pared. En este dibujo a escala, 10 mm representan 1 pie de la distancia real.

Fíjate que la distancia vertical (llamada *altura*) entre el Punto *O* en el suelo y el Punto *A* en la escalera es de 20 mm y que la distancia horizontal (llamada *carrera*) entre los dos puntos es de 8 mm.

- a. ¿Cuál es la distancia vertical, o altura, en el dibujo del Punto *O* al Punto *E*? ¿Cuál es la distancia horizontal o carrera en el dibujo del Punto *O* al Punto *E*?



- b. Copia y completa la tabla midiendo la altura y la carrera entre los puntos dados en el dibujo a escala.

Puntos	A a B	A a C	B a C	A a D	B a D	D a E	O a E
Altura	20						
Carrera	8						

- c. La pendiente de una escalera, o cualquier otra recta entre dos puntos, se puede describir por la razón $\frac{\text{altura}}{\text{carrera}}$. Agrega otra fila a tu tabla, rotúlala $\frac{\text{altura}}{\text{carrera}}$ y calcula la razón para cada par de puntos en la tabla.
- d. Selecciona cualquiera de los dos puntos sin rotular en la escalera y halla la razón $\frac{\text{altura}}{\text{carrera}}$ para tus puntos. ¿Cómo se compara esta razón con las razones para la carrera de los puntos en la tabla?

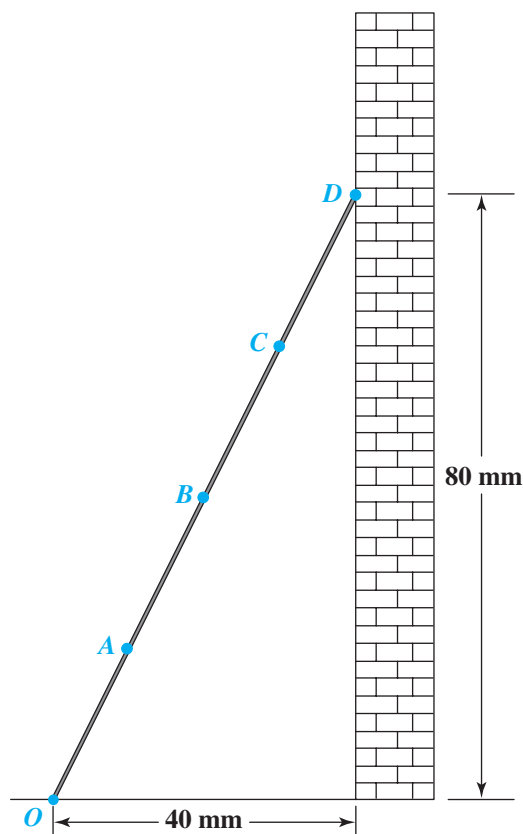
2. Éste es un dibujo a escala de una segunda escalera cuya parte superior está recostada a 8 pies de altura y cuya base está a 4 pies de la pared.

Selecciona por lo menos tres pares de puntos en esta escalera y calcula la razón $\frac{\text{altura}}{\text{carrera}}$ para cada par. ¿Qué hallas?

3. ¿En qué se parece la razón $\frac{\text{altura}}{\text{carrera}}$ de la primera escalera con la razón $\frac{\text{altura}}{\text{carrera}}$ de la segunda escalera? ¿Cuál escalera parece estar más inclinada?

4. Imagina una tercera escalera recostada más arriba, a 11 pies de altura y a 4 pies de la base de la pared. ¿En qué se parece su razón $\frac{\text{altura}}{\text{carrera}}$ con las dos razones de las primeras dos escaleras?

5. ¿Crees que usar $\frac{\text{altura}}{\text{carrera}}$ es una buena manera de describir la pendiente? Explica.



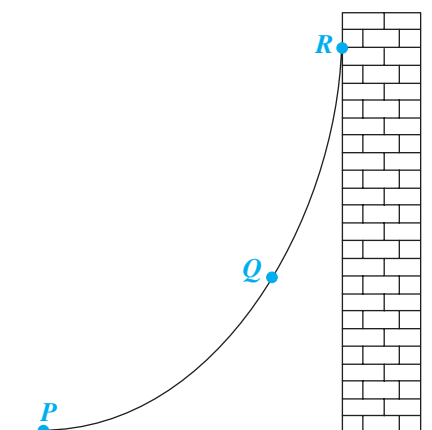
MATERIALES

regla métrica

Serie de problemas B

¿Qué sucede si tratas de hallar la razón $\frac{\text{altura}}{\text{carrera}}$ para un objeto curvo? El siguiente dibujo muestra un cable atado a una pared.

1. Calcula la razón $\frac{\text{altura}}{\text{carrera}}$ para cada par de puntos: Puntos P y Q , Puntos Q y R y Puntos P y R . ¿Qué hallas?
2. Describe la diferencia entre la pendiente de una escalera y la de un cable curvo. Asegúrate de comentar la razón $\frac{\text{altura}}{\text{carrera}}$ para las dos situaciones.



VOCABULARIO

pendiente

MATERIALES

papel cuadriculado

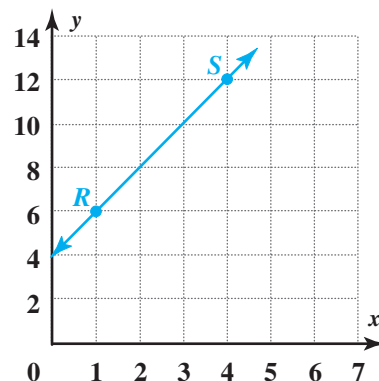
El uso de la razón $\frac{\text{altura}}{\text{carrera}}$ es una buena manera de describir la pendiente de una escalera, pero no la de un cable curvo. Como una escalera es recta, puedes calcular la $\frac{\text{altura}}{\text{carrera}}$ entre cualquier par de puntos. La razón será la misma sean cual sean los puntos que selecciones.

La razón $\frac{\text{altura}}{\text{carrera}}$ también se usa para describir la pendiente de una recta. La razón $\frac{\text{altura}}{\text{carrera}}$ de una recta se llama **pendiente** de la recta.

Serie de problemas C

Considera esta recta.

1. ¿Cuáles son las coordenadas de los Puntos R y S ?
2. Calcula la pendiente de una recta que pasa a través de los Puntos R y S .



Podrías haber calculado la pendiente de la recta restando coordenadas. La altura del Punto R al Punto S es la diferencia entre las coordenadas y de esos puntos y la carrera es la diferencia entre las coordenadas x . Sin embargo, es posible que no hayas considerado que el *orden* en el que restaste las coordenadas afecta el valor de la pendiente.

3. En las Partes a, b y c calcula la pendiente de la recta otra vez, restando las coordenadas del Punto R de las coordenadas del Punto S .
 - a. Calcula la altura restando la coordenada y del Punto R de la coordenada y del Punto S .
 - b. Calcula la carrera restando la coordenada x del Punto R de la coordenada x del Punto S .
 - c. Usa tus respuestas para calcular la pendiente de la recta que pasa a través de los Puntos R y S .
4. ¿Hallarías la misma pendiente si restaras las coordenadas del Punto S de las coordenadas del Punto R ? Pruébalo.
5. ¿Hallarías un valor diferente para $\frac{\text{altura}}{\text{carrera}}$ si usaras un par diferente de puntos en la recta? Explica.
6. Ben calculó la pendiente de la recta como -2 . Éste es su cálculo:

$$\frac{\text{altura}}{\text{carrera}} = \frac{12 - 6}{1 - 4} = \frac{6}{-3} = -2$$

¿Cuál fue el error de Ben?

- 7.** Revisa tus respuestas a los Problemas 4 al 6. ¿Es importante el orden en que se restan las coordenadas? Explica.

Grafica la recta que pasa a través de cada par de puntos dados y calcula su pendiente.

8. $(-3, 4)$ y $(-7, 2)$

9. $(2, 4)$ y $(3, 3)$

10. $(3, 5)$ y $(4, 5)$

11. $(-3, 4)$ y $(-4, 6)$

- 12.** Revisa tu trabajo en los Problemas 9 al 12. Dos de las rectas tienen una pendiente negativa. ¿Qué notas en estas rectas?

- 13.** Una de las rectas en los Problemas 9 al 12 tiene una pendiente de 0. ¿Qué notas en esta recta?

- 14.** Una recta tiene una pendiente $-\frac{2}{3}$. Un punto de la recta es $(4, 5)$. Halla dos puntos más en la recta y explica cómo los hallaste.

- 15.** Considera que la recta pasa a través de los puntos $(2, 4)$ y $(2, 7)$.

a. Grafica la recta. ¿A qué se parece?

b. Intenta calcular la pendiente de la recta. ¿Qué sucede?

c. ¿Cuál es la coordenada x de cada punto de la recta?

d. ¿Cuál es la ecuación de la recta?

Los topógrafos usan instrumentos para determinar la pendiente de cierta sección de terreno.



Comparte & resume

1. Dos rectas con una pendiente positiva se grafican en un conjunto de ejes. Explica por qué una pendiente mayor para una recta significa que esa recta será más inclinada que la otra.
2. ¿Qué te indica una pendiente negativa acerca de una recta?
3. ¿Qué te indica una pendiente de 0 acerca de una recta?
4. Da las coordenadas de dos puntos de manera que la recta que los conecte tenga una pendiente positiva.

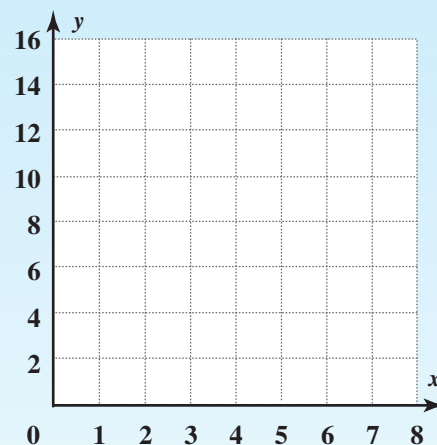
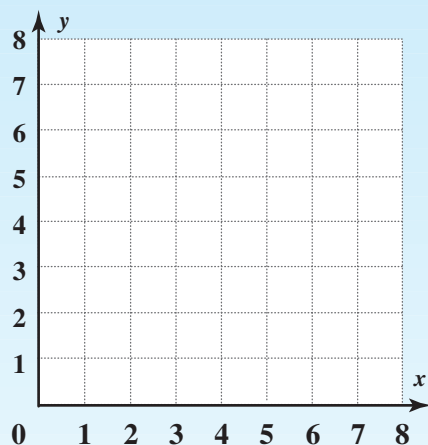
Investigación 2 Pendiente y escala

La pendiente es una buena medida del grado de inclinación de objetos como las escaleras. Sin embargo, cuando uses una gráfica para calcular o mostrar las pendientes de rectas, debes tener cuidado.

MATERIALES
papel cuadriculado

Explora

Copia las cuadrículas en papel cuadriculado y grafica la ecuación $y = 2x + 1$ en cada cuadrícula.



Describe la diferencia entre las gráficas. ¿Qué crees que causa esta diferencia?

Además de la pendiente, ¿qué otro factor afecta el grado de inclinación de la gráfica de una recta?

Serie de problemas D

1. La madre de Gabriela cree que Gabriela gasta demasiado dinero en cedés. Gabriela dice que como los cedés cuestan sólo \$10 en Deep Discount Sounds, la cantidad que gasta no aumenta muy rápidamente.
 - a. Gabriela decide hacer una gráfica que muestre cómo cambia la cantidad total que gasta a medida que compra más cedés. Cree que si selecciona cuidadosamente las escalas, convencerá a su madre de que la cantidad aumenta a una tasa lenta. Dibuja una gráfica que pudiera usar Gabriela. (Ayuda: Usa tus observaciones del Explora, en la página 29 para crear una gráfica que no se vea muy inclinada.)
 - b. La madre de Gabriela también sabe un poco acerca de las gráficas y quiere hacer una gráfica para convencer a Gabriela que el costo total aumenta rápidamente al aumentar su colección de cedés. Dibuja una gráfica que pudiera usar la madre de Gabriela.
2. Imagina que estás usando una gráfica para llevar un registro de la cantidad de dinero que queda en una cuenta bancaria. Empiezas con \$200 y retiras \$5 por semana. Supón que graficas el tiempo en semanas en el eje horizontal y el saldo del banco en dólares en el eje vertical.
 - a. ¿Cuál será la pendiente de la recta?
 - b. Haz la gráfica de manera que parezca que el saldo está disminuyendo rápidamente.
 - c. Haz otra gráfica de la misma relación de manera que parezca que el saldo está disminuyendo muy lentamente.

Puedes graficar una ecuación en una calculadora graficadora y después ajustar la pantalla de visión para cambiar la apariencia de la gráfica.

Serie de problemas E

Ajusta la pantalla de tu calculadora graficadora a la configuración estándar (los valores de x y y de -10 a 10).

1. Gráfica la ecuación $y = x$ y traza la gráfica.
2. Ahora cambia la pantalla, usa la tecla del cuadrado para fijar tu calculadora. Esto ajusta las escalas para que la pantalla muestre 1 unidad con la misma longitud en ambos ejes. Grafica $y = x$ usando la nueva configuración. Traza la gráfica.
3. Compara las gráficas que hiciste en los Problemas 1 y 2.
4. Ajusta la configuración de la pantalla para hacer que la recta parezca más inclinada que ambas gráficas. Anota la configuración que usaste.
5. Ajusta la configuración de la pantalla para hacer que la recta parezca menos inclinada que las otras gráficas. Anota la configuración de la pantalla que usaste.

MATERIALES

calculadora
graficadora

Comparte & resume

Trabaja con un(a) compañero(a). Uno de ustedes deberá usar la calculadora para graficar la ecuación $y = 3x + 2$ de manera que se vea muy inclinada, mientras que el otro grafica la misma ecuación de manera que no se vea tan inclinada.

1. Juntos, escriban una descripción de lo que hizo cada uno para lograr las gráficas que obtuvieron.
2. Trata de explicar por qué funciona tu método.

Investigación 3 Usa puntos y pendientes para escribir ecuaciones

Ahora, aprenderás cómo hallar ecuaciones para rectas, cuando conoces dos puntos en la recta o cuando conoces la pendiente de la recta y un punto.

MATERIALES

papel cuadriculado

Explora

La tabla describe una relación lineal.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-3	-1	1	3	5	7

¿Cuál es la ecuación de la recta que describe la tabla? Explica cómo hallaste la ecuación.

Usa dos pares de datos (x, y) para calcular la pendiente de esta recta. ¿Cómo se usa la pendiente en la ecuación que escribiste?

Grafica la ecuación.

¿Cuál es el valor y del punto en que la gráfica cruza el eje y ? ¿Cómo se usa el valor en la ecuación?

VOCABULARIO

coeficiente
intersección y

Has visto que las ecuaciones lineales se pueden escribir en la forma $y = mx + b$. El multiplicador de una variable, como x , se conoce como su **coeficiente**. En una ecuación lineal de la forma $y = mx + b$, el valor de m es la pendiente de la recta. El término constante, b , es la **intersección y** de la recta. Es decir, b es la coordenada y del punto en que la recta cruza (o *interseca*) el eje y .

En Explora en la página 31, es posible que hayas podido calcular los valores de m y b fácilmente. Pero ahora, observa esta tabla que también muestra pares de datos para una relación lineal:

x	-6	-4	-1	$1\frac{1}{2}$	3	7
y	$-3\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{4}$	0	$1\frac{7}{8}$	3	6

Hallar la ecuación de la recta para estos datos es una tarea un poco más difícil. Podrías calcular la pendiente, pero no se da la intersección y y no puedes estar seguro de cuál es con solo graficar los pares de datos y observar la gráfica.

Sin embargo, *puedes* averiguar la ecuación de una recta si conoces la *pendiente* y *un punto* en la recta. El hecho de que las ecuaciones lineales tengan la forma $y = mx + b$ te facilita esto.

EJEMPLO

¿Cuál es la ecuación de la recta que tiene pendiente 3 y pasa a través del punto (2, 5)?

Comienza con el hecho de que la ecuación de una recta se puede escribir en la forma $y = mx + b$. La pendiente es 3, de modo que $m = 3$. Esto da la ecuación $y = 3x + b$.

Debido a que el punto (2, 5) está sobre la recta, al reemplazar 2 por x y 5 por y se satisface la ecuación. Decimos que el punto (2, 5) *satisface* la ecuación $y = 3x + b$.

$$\begin{aligned}y &= 3x + b \\5 &= 3(2) + b \\5 &= 6 + b \\-1 &= b\end{aligned}$$

Ahora sabes que el valor de la intersección y , b , es -1 y puedes escribir la ecuación final:

$$y = 3x - 1$$

Serie de problemas F

1. ¿Cuál es la ecuación de la recta que tiene pendiente 4 y pasa a través del punto (1, 5)?
2. ¿Cuál es la ecuación de la recta que tiene pendiente 3 y pasa a través del punto (2, 4)?
3. ¿Cuál es la ecuación de la recta que tiene pendiente -2 y pasa a través del punto (8, -12)?
4. ¿Cuál es la ecuación de la recta que tiene pendiente 0 y pasa a través del punto (3, 5)?

Serie de problemas G

Supón que sólo conoces dos puntos de una recta, pero no la pendiente. ¿Cómo puedes hallar una ecuación de la recta? Por ejemplo, supón que quieres escribir una ecuación de la recta que contenga los puntos (1, 3) y (3, 11).

1. ¿Cuál es la pendiente de la recta que conecta estos puntos? Muestra cómo la calculaste.
2. Si la ecuación de esta recta tiene forma de $y = mx + b$, ¿cuál es el valor de m ?
3. Ahora calcula el valor de b (la intersección y) sin trazar una gráfica. Muestra tu trabajo. Ayuda: Mira retrospectivamente tu trabajo en la Serie de problemas F, si lo necesitas.
4. Escribe una ecuación de la recta.
5. Asegúrate de que los puntos (3, 11) satisfagan la ecuación reemplazando 3 por x y 11 por y , y después evaluando. También verifica que el punto (1, 3) satisfaga tu ecuación. De no ser así, ¿cometiste el error al calcular el valor de m o de b ? Escribe lo que hallaste y ajusta la ecuación si es necesario.



Recuerda

$$\text{pendiente} = \frac{\text{altura}}{\text{carrera}}$$



Serie de problemas H

Halla una ecuación de la recta que pasa a través de cada par de puntos. Traza los puntos y dibuja la recta para verificar si la ecuación es correcta. Si tienes problemas, repasa el proceso que seguiste en la Serie de problemas G.

1. (3, 7) y (8, 12)
2. (6, 11) y (18, 17)
3. (0, 0) y (100, 100)
4. (3, 5) y (-1, 5)

Serie de problemas I

Los investigadores han descubierto que la gente le pone sal a la comida por casi la misma cantidad de tiempo, sin importar cuántos hoyos tenga el salero o el tamaño de los hoyos.

Cuando usas un salero con hoyos grandes, es posible que uses más sal que cuando usas uno con hoyos pequeños. De hecho, parece haber una relación lineal entre la cantidad promedio de sal que la gente le pone a la comida y el área total de los hoyos del salero. Se recogieron los siguientes datos:

Área total de los hoyos (mm^2), a	4.5	8
Cantidad promedio de sal aplicada (g), s	0.45	0.73

Supón que los investigadores tienen razón y que la cantidad de sal está linealmente relacionada con el área total de los hoyos. Puedes usar la pequeña cantidad de datos en la tabla para estimar cuánta sal caería sobre los alimentos, de saleros con hoyos de diferentes tamaños.

1. Traza los dos puntos de la tabla, con el área total en el eje horizontal y úsalos para graficar una relación lineal. Piensa cuidadosamente acerca de los ejes y haz las escalas de modo que se puedan leer fácilmente.
2. Usa tu gráfica para calcular la cantidad de sal que riega un salero con un área total de 6 mm^2 .
3. Si cada hoyo tiene un radio de 1.1 mm , ¿cuál es el área de un hoyo?
4. Usa tu gráfica y tu respuesta al Problema 3 para estimar la cantidad de sal que salió de un salero con 10 de estos hoyos.
5. Si quieres limitar tu consumo de sal a 0.5 g por comida, ¿cuál debería ser el área total de los hoyos en tu salero?
6. Halla una ecuación de la recta que pasa a través de los puntos (4.5, 0.45) y (8, 0.73).



El cuerpo de un ser humano adulto promedio contiene casi 250 gramos de sal.

7. Usa la ecuación para calcular la cantidad de sal que salió de las áreas totales de los hoyos dados.
- a. 2.7 mm^2 , aproximadamente la menor área total de hoyos que se usa en los saleros comerciales
 - b. 44.7 mm^2 , aproximadamente la mayor área total de hoyos que se usa

Comparte & resume

1. Sin usar números, describe un método general para escribir una ecuación para una recta, si todo lo que conoces es la pendiente de la recta y un punto sobre ésta.
2. Sin usar números, describe un método general para escribir una ecuación para una recta, si todo lo que conoces son dos puntos en la recta.



Puedes hacer algunos diseños muy interesantes con ecuaciones lineales en tu calculadora graficadora.

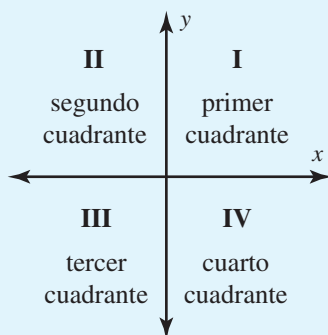
MATERIALES

calculadora
graficadora



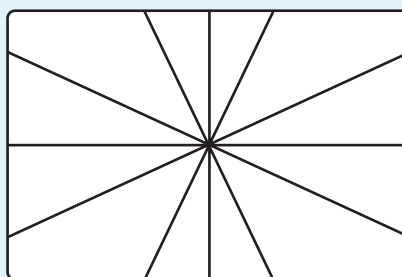
Recuerda

Los cuatro cuadrantes de una gráfica se enumeran así:



Pruébalo

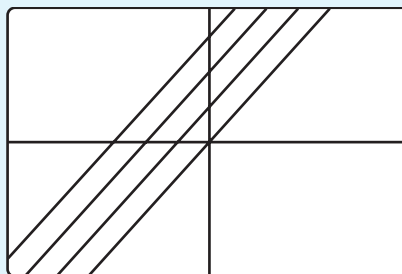
Prueba para ver si al graficar cuatro ecuaciones lineales en una pantalla puedes producir un diseño de estrella, como el siguiente. Tu diseño no tiene que verse exactamente como éste, pero debe incluir dos rectas que pasen a través de los Cuadrantes I y III y, dos rectas que pasen a través de los Cuadrantes II y IV. Dibuja tu diseño.



1. Anota las ecuaciones que usaste.
2. ¿Qué notas acerca de las intersecciones y en tus ecuaciones?
3. ¿Qué notas acerca de las pendientes en tus ecuaciones?

La lluvia

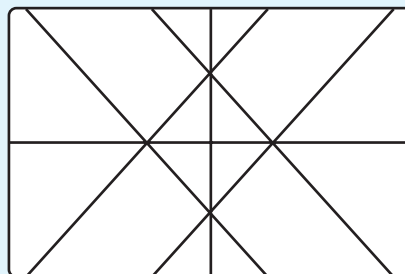
En los mapas meteorológicos, con frecuencia, se usa un conjunto de rectas paralelas para simbolizar ráfagas de lluvia. En tu calculadora, trata de crear rectas paralelas que estén espaciadas de manera uniforme, que se parezcan al siguiente diseño. Dibuja tu diseño.



4. Anota las ecuaciones que usaste.
5. ¿Qué notaste acerca de las pendientes en tus ecuaciones? ¿Cómo se refleja esto en tu diseño?
6. ¿Qué notas acerca de las intersecciones y en tus ecuaciones? ¿Cómo se refleja esto en tu diseño?

Haz rombos

Trata de hacer tu propio rombo, como éste, en tu calculadora. Dibuja tu diseño.



7. Anota las ecuaciones que usaste.
8. ¿Qué notas acerca de las pendientes en tus ecuaciones?
9. ¿Qué notas acerca de las intersecciones y en tus ecuaciones?

¿Qué has aprendido?

10. Piensa acerca de las ecuaciones que escribiste para hacer diferentes tipos de líneas y formas: rectas paralelas, rectas que irradian de un punto central, como en la estrella y rectas que se intersecan que forman cuadrados o rombos. Haz un diseño propio con por lo menos cuatro rectas.

Comparte lo que has aprendido en la preparación de un informe escrito sobre cómo hacer diseños lineales en una calculadora graficadora. Incluye los dibujos de tus diseños y las ecuaciones que los pueden reproducir.

Ejercicios por tu cuenta

Practica & aplica

1. Considera estas tablas para los datos de dos relaciones lineales.

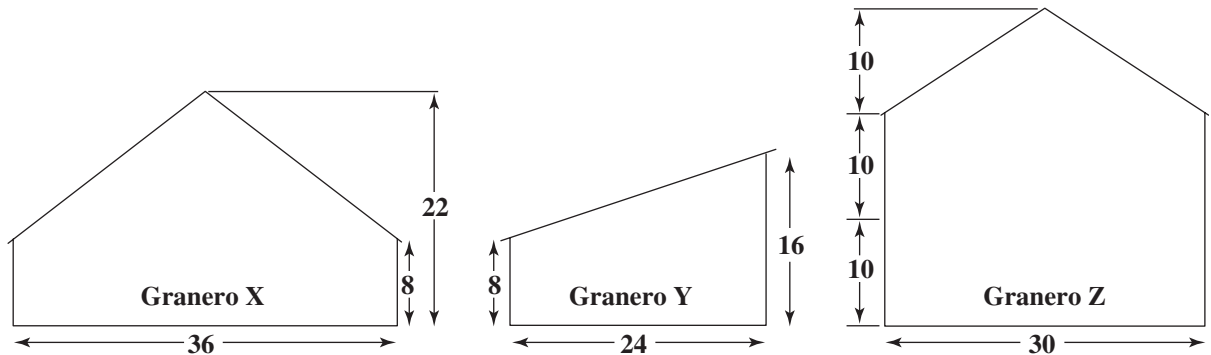
Relación 1

x	y
1	4.5
2	6
3	7.5
4	9

Relación 2

x	y
-3	1
-1	3
1	5
3	7

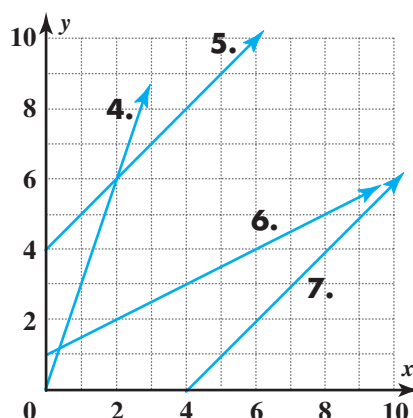
- Usa los pares (x, y) en las tablas para trazar cada recta en papel cuadriculado.
 - Calcula la pendiente de cada recta al hallar la razón de $\frac{\text{altura}}{\text{carrera}}$ entre dos puntos.
 - ¿Usaste las tablas o las gráficas en la Parte b? ¿Importa cuál hayas usado? Explica.
 - Verifica tus resultados calculando la pendiente de cada recta otra vez y usando puntos diferentes a los que usaste antes.
2. Observa los techos de estos tres graneros. Todas las medidas se dan en pies.



- ¿Qué techo parece más inclinado?
 - Halla la *vertiente* o pendiente del techo de cada granero. ¿Estuvo correcta tu predicción?
3. Inventa una ecuación para una relación lineal.
- Construye una tabla de los valores de (x, y) para tu ecuación. Incluye por lo menos cinco pares de coordenadas.
 - Traza una gráfica usando los valores en tu tabla. Si tu gráfica no es una recta, verifica que los valores de tu tabla estén correctos.
 - Selecciona dos puntos de la tabla y úsalos para determinar la pendiente de la recta. Verifica la pendiente usando otros dos pares (x, y) .



En los Ejercicios 4 al 7, calcula la pendiente de la recta, identificando dos puntos en la recta y usándolos para calcular la pendiente.

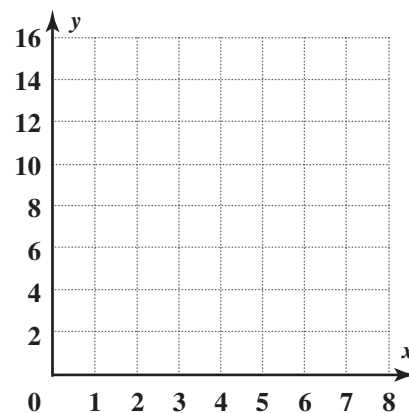
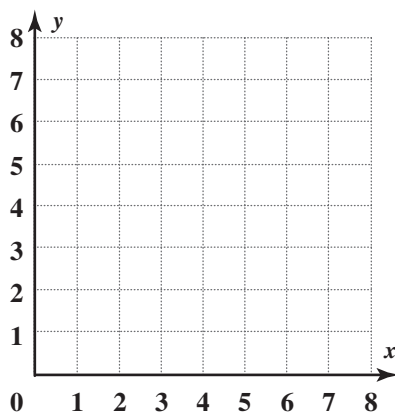


En los Ejercicios 8 al 11, se te da la pendiente y un punto de una recta. Halla otro punto en la misma recta. Después, traza la recta en papel cuadrículado.

8. pendiente: $\frac{1}{2}$; punto: (3, 4) 9. pendiente: -1 ; punto: (2, 5)

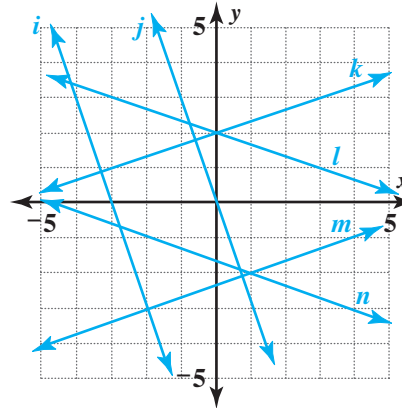
10. pendiente: 3; punto: (2, 8) 11. pendiente: $\frac{1}{4}$; punto: (4, 5)

12. Aquí hay dos relaciones lineales: $y = 3x + 2$ y $y = 2x + 3$. Grafica ambas relaciones en las copias de las siguientes cuadrículas. Cada cuadrícula tendrá dos gráficas.



- ¿Qué aspectos de las gráficas dependen de la cuadrícula en la que se tracen?
- ¿Qué partes de las gráficas no se ven afectadas por la escala de la cuadrícula? Por ejemplo, ¿cambian de una cuadrícula a otra los puntos de las intersecciones con los ejes x y y ?

13. Estudia estas gráficas.



a. ¿Qué pares de rectas tienen la misma pendiente?

b. Calcula la pendiente de cada recta.

Halla una ecuación para cada recta.

14. una recta con pendiente -1 y que pasa a través del punto $(1, 4)$

15. una recta con pendiente $\frac{1}{3}$ y que pasa a través del punto $(3, 3)$

16. una recta con pendiente -2 y que pasa a través del punto $(3, 6)$

Halla una ecuación de la recta que pasa a través de los puntos dados.

17. $(3, 4)$ y $(7, 8)$

18. $(2, 7)$ y $(6, 6)$

19. $(3, 5)$ y $(9, 9)$

Conecta & amplía



Recuerda

Las rectas tienen una *diferencia constante* en sus valores y : cuando cambian en cierta cantidad los valores de x , los valores de y también cambian en cierta cantidad.

Para los Ejercicios 20 al 28, contesta las Partes a y b.

a. ¿Cuál es la diferencia constante entre los valores de y a medida que los valores de x aumentan en 1?

b. ¿Cuál es la diferencia constante entre los valores de y a medida que los valores de x disminuyen en 2?

20. $y = x$

21. $y = x + 2$

22. $y = 3x - 3$

23. $y = -2x + 12$

24. $y = 5x$

25. $y = \frac{1}{2}x$

26. $y = 23x - 18$

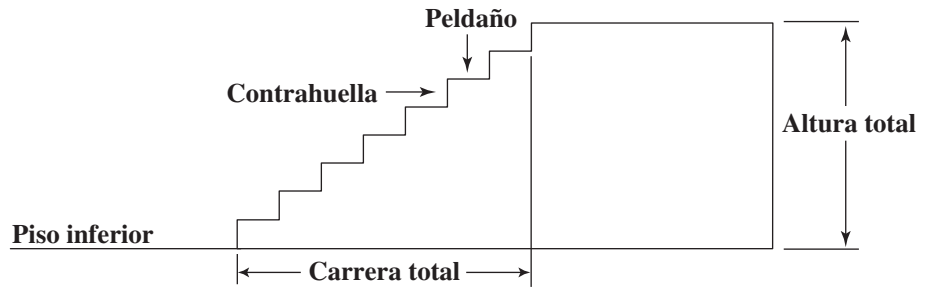
27. $y = -x$

28. $y = -2x + 6$

- 29. Arquitectura** Una arquitecta está diseñando varias escaleras para una casa en la que la distancia entre pisos es de 10 pies. Para diseñar una escalera, considera estas dos razones:

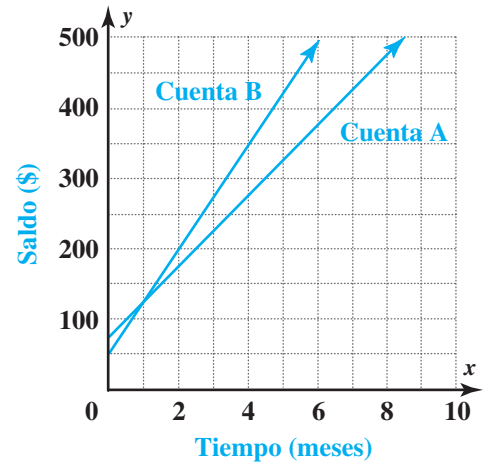
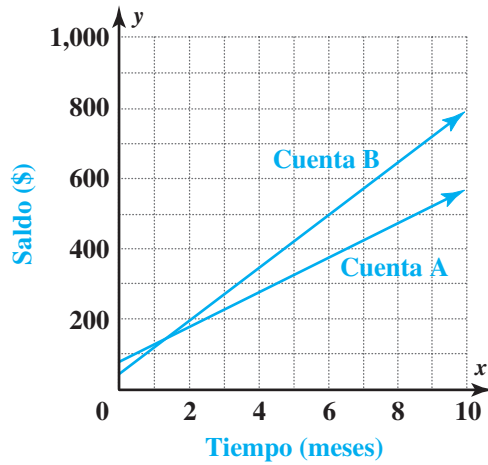
$$\frac{\text{altura total}}{\text{carrera total}} \quad \frac{\text{contrahuella}}{\text{peldaño}}$$

El diagrama muestra cómo se miden estas cantidades.



- Una escalera va a tener 18 escalones con un tramo total de 14 pies. ¿Cuál es la razón $\frac{\text{altura total}}{\text{carrera total}}$ para la escalera?
 - Calcula la contrahuella y el peldaño de cada escalón, en pulgadas, para esta escalera. ¿Cuál es la razón $\frac{\text{contrahuella}}{\text{peldaño}}$?
 - Compara tus resultados para las Partes a y b. Explica lo que hallaste.
- 30.** Diseña una escalera con una altura total de 14 pies. La contrahuella debe ser entre 6 pulg y 8 pulg. Todos los peldaños deben tener la misma altura y la misma carrera. (Refiérete al diagrama anterior.) La suma de la contrahuella y del peldaño debería ser entre 17 pulg y 18 pulg. Debes determinar estas cosas:
- el número de escalones
 - la altura de cada escalón (en pulgadas)
 - la contrahuella (en pulgadas)
 - la razón $\frac{\text{contrahuella}}{\text{peldaño}}$
 - el tramo total (en pies)
 - la razón $\frac{\text{altura total}}{\text{carrera total}}$ para la escalera

- 31.** El Sr. Arthur tiene dos cuentas bancarias, la Cuenta A y la Cuenta B. Cada gráfica muestra cuánto dinero hay en sus dos cuentas con el paso del tiempo.



- ¿Qué cuenta está aumentando más rápidamente?
- ¿Qué cuenta empezó con más dinero?
- ¿Importa qué cuadrícula usas al comparar las tasas de crecimiento de las cuentas? Explica.

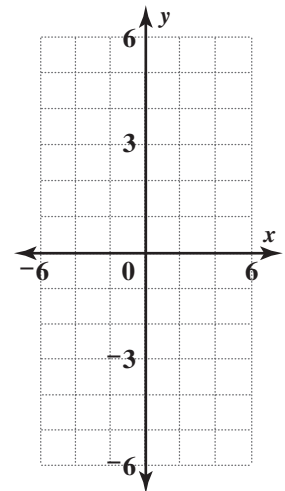
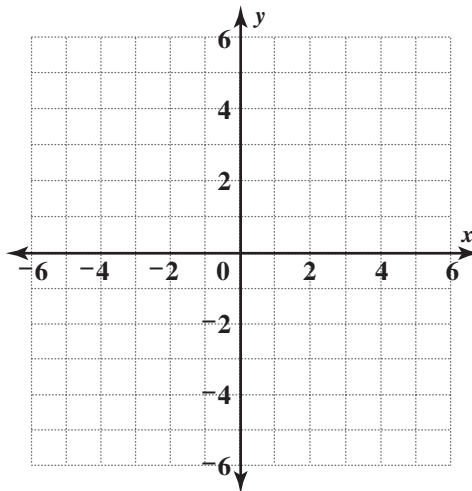


Recuerda

Un ángulo recto mide 90° .

- 32.** Alejandro observa las ecuaciones $y = \frac{3}{2}x - 1$ y $y = -\frac{2}{3}x + 2$ y dice: “Estas rectas forman un ángulo recto”.

- Grafica ambas rectas en *dos cuadrículas diferentes*, con los ejes rotulados como se muestra aquí.



- Compara las rectas en cada cuadrícula. ¿Forman un ángulo recto los dos pares de rectas?
- ¿Qué tipo de suposición debe haber hecho Alejandro cuando dijo que las rectas formaban un ángulo recto?

Para cada ecuación, identifica la pendiente y la intersección y. Grafica la recta para verificar tu respuesta.

33. $y = 2x + 0.25$

34. $y = -x + 5$

35. $y = x - 3$

36. $y = -2x$

37. $y = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x$

38. $y = 3x$

39. La tabla muestra los valores de x y y para una relación particular.

x	6	3	1	2.5
y	7	1	-3	0

- Grafica el par ordenado (x, y) . Haz de 10 a -10 la escala de cada eje.
- ¿Podrían los puntos representar una relación lineal? De ser así, escribe una ecuación para la recta.
- A partir de tu gráfica, predice el valor y para un valor de x de -2. Verifica tu respuesta reemplazándola en la ecuación.
- A partir de tu gráfica, calcula el valor de x para un valor de y de -2. Verifica tu respuesta reemplazándola en la ecuación.
- Usa tu ecuación para calcular el valor y para cada uno de estos valores de x : 0, -1, -1.5, -2.5. Verifica que todos los puntos correspondientes estén sobre la recta.

En tus propias palabras

¿Cómo puedes determinar la pendiente de una recta a partir de una gráfica? Si se te da la pendiente de una recta, ¿qué más necesitas saber para poder graficarla?



Recuerda

Una *conjetura* es un enunciado que alguien cree que es verdadero, pero que todavía no se ha comprobado.

Repaso mixto

40. Considera estas cuatro ecuaciones.

i. $y = 2x - 3$

ii. $y = -\frac{1}{2}x - 6$

iii. $y = \frac{2}{5}x + 4$

iv. $y = -\frac{5}{2}x$

- Grafica las cuatro ecuaciones en uno de los conjuntos de ejes. Usa la misma escala para cada eje. Rotula las rectas con los números romanos apropiados.
- ¿Cuál es la pendiente de cada recta?
- ¿Qué notas acerca del ángulo de la intersección entre las Rectas i y ii? ¿Y entre las Rectas iii y iv?
- ¿Cuál es la relación entre las pendientes de las Rectas i y ii? ¿Y entre las pendientes de las Rectas iii y iv?
- Haz una conjetura acerca de la pendiente de rectas perpendiculares.
- Crea dos o más rectas con pendientes que respalden tu conjetura. ¿Son perpendiculares?
- Escribe una ecuación para la recta que pasa a través del punto $(-1, 4)$ y es perpendicular a $y = \frac{1}{3}x + 4$. Verifica tu respuesta graficando ambas rectas en uno de los conjuntos de ejes. Usa la misma escala para cada eje.

Evalúa cada expresión si $a = 2$ y $b = 3$.

41. $a^b + b^a$

42. $\left(\frac{a}{b} + a\right)^a$

43. $b^a \cdot b^a$

44. Relaciona cada ecuación con una recta.

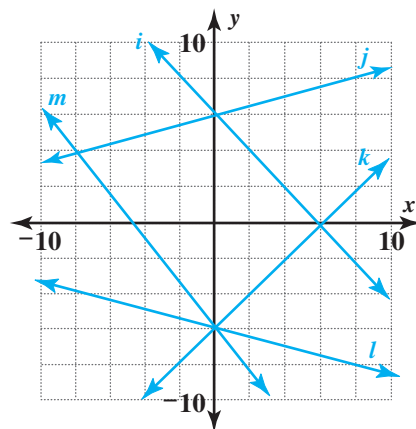
a. $y = -\frac{5}{4}x - 6$

b. $y = 0.25x + 6$

c. $y = -0.25x - 6$

d. $y = -x + 6$

e. $y = x - 6$



45. Consulta las gráficas del Problema 44. Indica sobre qué recta o rectas está cada punto dado.

a. $(0, -6)$

b. $(6, 0)$

c. $(-4, -1)$

d. $(-2, 8)$

e. $(-8, -4)$

f. $(-2, -2)$



Debido a que un eclipse solar total es observable sólo en un área geográfica limitada, la mayoría de la gente rara vez experimenta uno.



Recuerda

La *mediana* es el valor central de un conjunto de valores ordenados de manera ascendente o descendente. Si hay un número par de valores en los datos, ésta es el promedio de los dos valores centrales.

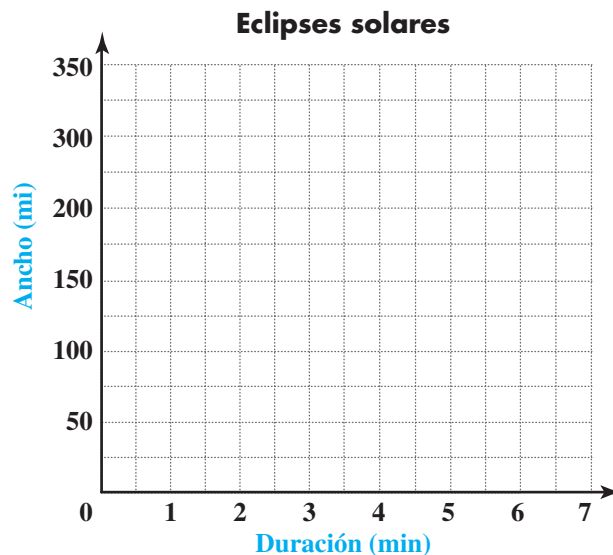
- 46. Ciencias de la Tierra** La tabla da la duración y el ancho de los primeros 10 eclipses solares después del año 2000.

Eclipses solares

Fecha	Duración (minutos:segundos)	Ancho (millas)
21 de jun. de 2001	4:56	125
4 de dic. de 2002	2:04	54
23 de nov. de 2003	1:57	338
8 de abr. de 2005	0:42	17
29 de mar. de 2006	4:07	118
1º de ago. de 2008	2:27	157
22 de jul. de 2009	6:39	160
11 de jul. de 2010	5:20	164
13 de nov. de 2012	4:02	112
3 de nov. de 2013	1:40	36

Fuente: *World Almanac and Book of Facts 1999*. Derechos de impresión © 1998 Primedia Reference Inc.

- ¿En qué fecha dura más el eclipse total de Sol?
- ¿Cuál es la mediana de la duración de tiempo de los eclipses mencionados? ¿Cuál es la mediana del ancho?
- Coloca los datos de la tabla en una cuadrícula como la siguiente.



- Fíjate que uno de los puntos parece muy alejado de la mayoría de los otros puntos. ¿Cuál es la fecha asociada con ese punto?

Más exploraciones con rectas

Has trabajado con ecuaciones en la forma $y = mx + b$, donde m es la pendiente de la recta y b es la intersección y. Tanto m como b son constantes, mientras que x y y son variables.

Los valores de m y b afectan la apariencia de la gráfica. En esta lección, estudiarás estos efectos que te ayudarán a analizar patrones en gráficas y ecuaciones.

MATERIALES

calculadora
graficadora

Explora

Cada grupo contiene ecuaciones en la forma $y = mx + b$.

Grupo I

$$\begin{aligned}y &= x + 2 \\y &= 2x + 2 \\y &= -2x + 2 \\y &= \frac{1}{2}x + 2\end{aligned}$$

Grupo II

$$\begin{aligned}y &= -2x - 1 \\y &= -2x \\y &= -2x + 1 \\y &= -2x + 2\end{aligned}$$

- Grafica las cuatro ecuaciones del Grupo I en una sola pantalla de tu calculadora. Dibuja las gráficas. Rotula los valores mínimos y máximos en cada eje.

¿Qué tienen en común las cuatro ecuaciones del Grupo I? Da otra ecuación que pertenezca a este grupo.

- Ahora grafica las cuatro ecuaciones del Grupo II en una sola pantalla. Traza y rotula las gráficas.

¿Qué tienen en común las cuatro ecuaciones del Grupo II? Da otra ecuación que pertenezca a este grupo.

- En un grupo, las ecuaciones tienen diferentes valores para m , pero el mismo valor para b . Si empiezas con una ecuación específica y cambias el valor de m , ¿cómo será diferente la gráfica de la nueva ecuación?
- En el otro grupo, las ecuaciones tienen diferentes valores para b , pero el mismo valor para m . Si empiezas con una ecuación específica y cambias el valor de b , ¿cómo será diferente la gráfica de la nueva ecuación?

Las rectas del Grupo I son una *familia de rectas* en las cuales todas pasan por el punto $(0, 2)$. Las rectas del Grupo II son una familia de rectas con pendiente -2 .

Investigación

1

Rectas paralelas y puntos colineales

Como viste en la Lección 1.2, puedes usar dos puntos para calcular la pendiente de la recta a través de los puntos. En esta investigación, trabajarás más con las pendientes de rectas. Primero usarás la conexión entre rectas paralelas y sus pendientes.

MATERIALES

papel cuadriculado



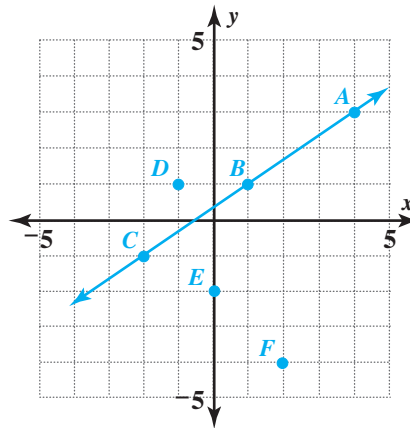
Recuerda

El origen es el punto $(0, 0)$.

Serie de problemas A

1. Observa otra vez las gráficas de las ecuaciones en el Grupo II de Explora. ¿Qué notas?
2. Si dos ecuaciones de la forma $y = mx + b$ tienen el mismo valor m , ¿qué sabes acerca de sus gráficas? Si no estás seguro, escribe unas cuantas ecuaciones que tengan el mismo valor m y gráficelas. Explica por qué tiene sentido tu observación.
3. Sin graficar, decide cuál de estas ecuaciones son de rectas paralelas. Explica.
 - a. $y = 2x + 3$
 - b. $y = 2x^2 + 3$
 - c. $y = 2x - 7$
 - d. $y = 5x + 3$
4. Considera la recta $y = 5x + 4$.
 - a. Una segunda recta es paralela a esta recta. ¿Qué sabes acerca de la ecuación de la segunda recta?
 - b. Escribe una ecuación para la recta paralela $y = 5x + 4$ que pasa a través del origen.
 - c. Escribe una ecuación para la recta paralela $y = 5x + 4$ que cruza el eje y del punto $(0, 3)$.
 - d. Escribe una ecuación para la recta paralela $y = 5x + 4$ que pasa a través del punto $(2, 11)$. Ayuda: El par de datos $(2, 11)$ debe satisfacer la ecuación.
5. La ecuación de una recta es $y = 3x - 1$. Halla una ecuación para la recta paralela a ésta y que pasa por el punto $(3, 4)$.
6. La ecuación de una recta es $y = 4$.
 - a. Grafica la recta.
 - b. Halla una ecuación de la recta paralela a ésta y que pasa por el punto $(3, 6)$.

Los siguientes puntos A , B y C son *colineales*. En otras palabras, todos están sobre la misma recta. Los puntos D , E y F no son colineales.



Si te dan tres puntos, ¿cómo puedes saber si son colineales? Puedes trazar los puntos para ver si se parecen a los que están sobre la misma recta, pero no estarías seguro. En la Serie de problemas B, desarrollarás un método para determinar si los tres puntos están sobre la misma recta, sin graficarlos.

Serie de problemas B

- Halla la manera de determinar, *sin graficar*, si los tres puntos siguientes son colineales. Explica tu método.

(3, 5) (10, 26) (8, 20)

- Los puntos en uno de los siguientes conjuntos son colineales; los puntos en el otro conjunto no lo son. ¿Qué conjunto es cuál? Prueba tu método en ambos conjuntos para asegurarte de que funciona.

Conjunto A

(-4, -3)

(1, 2)

(7, 7)

Conjunto B

(-1, 1)

(0, -1)

(2, -5)

- Determina si los tres puntos en cada conjunto son colineales.

a. (-3, -2), (0, 4), (1.5, 7)

b. (1.25, 1.37), (1.28, 1.48), (1.36, 1.70)

Comparte & resume

1. ¿Cómo hallarías una ecuación para la recta que pasa a través del Punto C y es paralela a la recta que pasa a través de los Puntos A y B ? Supón que conoces las coordenadas de cada punto y que el Punto C no está en la recta que pasa a través de los Puntos A y B .
2. Describe un método para determinar si el Punto D está en la recta que pasa a través de los Puntos A y B , si conoces las coordenadas para cada punto.

Investigación

2

Reordena y reduce ecuaciones lineales

Las ecuaciones pueden ser complicadas y, a veces, no es obvio si una relación es lineal. Una gráfica puede indicar si la relación *parece* lineal, pero aún así, puede no serlo.

Piensa & comenta

Por su forma sabes que la ecuación $y = 3x + 2$ representa una recta, pero estas ecuaciones no están en esa forma:

$$4x + 3y = 12$$

$$y = \frac{4x + 2(3 + x) - 2}{2}$$

¿Cómo puedes determinar si estas ecuaciones son lineales? Explica tu razonamiento.

VOCABULARIO

forma pendiente-intersección

Si puedes escribir una ecuación en la forma $y = mx + b$, sabes que es lineal y puedes identificar fácilmente la pendiente m y la intersección y , b . De hecho, $y = mx + b$ con frecuencia se llama **forma pendiente-intersección** de una ecuación lineal.

Serie de problemas C

Determina si cada ecuación es lineal. Si una ecuación es lineal, identifica el valor de m y el de b . Si una ecuación no es lineal, explica cómo lo sabes.

1. $3y = \frac{x}{2} - 8$

2. $y = 3$

3. $y = \frac{2}{x}$

4. $5y - 7x = 10$

5. $2y = 10 - 2(x + 3)$

6. $y = x(x - 1) - 2(1 - x)$

7. $y = 2x + \frac{1}{2}(3x + 1) + \frac{1}{4}(2x + 8)$

Serie de problemas D

1. ¿Cuál de estas ecuaciones describe la misma relación?

a. $p = 2q + 4$

b. $p - 2q = 4$

c. $p - 2q + 4 = 0$

d. $0.5p = q + 2$

e. $p - 4 = 2q$

f. $2p = 8 + 4q$

Escribe cada ecuación en la forma pendiente-intersección.

2. $y - 1 = 2x$

3. $2y - 4x = 3$

4. $2x + 4y = 3$

5. $6y - 12x = 0$

6. $x = 2y - 3$

7. $y + 4 = -2$

8. En los Problemas 2 al 7, selecciona las ecuaciones cuyas gráficas sean rectas paralelas y dibújalas en los mismos ejes de coordenadas.

9. Agrupa las siguientes ecuaciones en conjuntos de rectas paralelas.

a. $y = (2x - 7) - 3$

b. $y + 5 + 2x = 5$

c. $y = 30 + 4(x - 7)$

d. $4y - 5x = 3x - 2$

e. $y + 3(10 - x) = x$

f. $y = 5x + 3(10 - x)$

g. $y = 8x - \frac{1}{3}(12x - 30)$

h. $y = 1 + \frac{1}{2}(2 - 4x)$

i. $y - 3 = -2x$

j. $2y = -4(3 - x)$

Comparte & resume

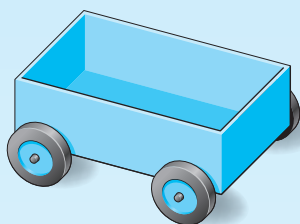
¿Cuáles son algunas de las estrategias que usaste para reducir las ecuaciones en esta investigación?

Investigación 3 **Ajusta las rectas a los datos**

A veces, al graficar datos, los puntos yacen cerca, pero no exactamente sobre una recta.

Piensa & comenta

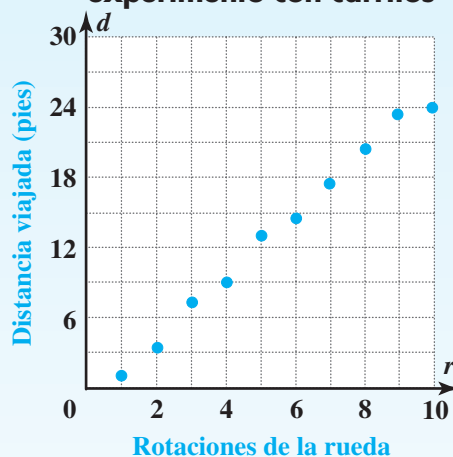
Los alumnos en una clase de ciencias estaban midiendo la distancia que avanzaba un carrito cada vez que las ruedas giraban una vez. Midieron la distancia de una rotación, dos rotaciones, tres rotaciones, y así sucesivamente. Las ruedas del carrito miden 2.5 pies de circunferencia.



¿Esperarías que los datos de los alumnos quedaran sobre una recta? De ser así, explica por qué y escribe la ecuación de esa recta.

La gráfica muestra una ubicación de los datos de los alumnos. Fíjate que los puntos no parecen quedar exactamente sobre una recta. ¿Por qué los datos recogidos no se hallarían exactamente sobre una recta?

Resultados del experimento con carritos



El uso de las matemáticas para describir algo, como un grupo de datos de un experimento, se llama *modelar*. Los modelos son importantes en muchas profesiones, especialmente en los campos de las ciencias y la estadística.

Con frecuencia, los que recogen datos no están seguros del tipo de relación que mostrarán. A veces, al graficarlos, los datos yacen cerca pero no exactamente sobre una recta. Podría darse el caso de que las variables están linealmente relacionadas, pero hay inconsistencias en las mediciones. O la relación entre las variables podría no ser *exactamente* lineal, pero lo suficientemente cerca para usar una recta como modelo razonable.

En casos como éstos, puedes usar los datos para hallar una *recta de óptimo ajuste*, es decir, una recta en que encajen todos los puntos lo más cerca posible. Entonces, puedes usar una recta de óptimo ajuste para hacer predicciones o resolver problemas.

Hay varias maneras de hallar tal recta. Algunas de las técnicas son sofisticadas, pero puedes hacer estimados razonablemente buenos con técnicas más simples.

Serie de problemas E

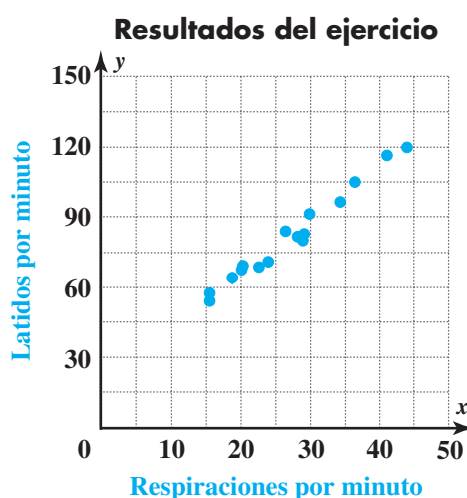
Se midieron las respiraciones y latidos por minuto de 16 personas después de que cada una caminó por 20 minutos. Los datos se muestran en la tabla.

Respiraciones por minuto	16	16	19	20	20	23	24	26	27	28	28	30	34	36	41	44
Latidos por minuto	57	59	66	68	71	70	72	84	82	80	83	91	94	105	116	120

MATERIALES

- papel cuadriculado
- regla transparente o un trozo de espagueti seco

He aquí una gráfica de los datos.





Recuerda

La *media*, o promedio, es la suma de todos los valores dividida entre el número de valores.

Parece que entre más rápida sea la respiración, más rápido es el ritmo cardíaco. La relación no es exactamente lineal, ya que es imposible trazar una sola recta que pase a través de cada punto de la gráfica. Sin embargo, si puedes hallar una recta que encaje razonablemente bien con los puntos, puedes usarla para predecir el valor de una variable (latidos o respiraciones por minuto) a partir de la otra.

1. Con tu compañero(a), traza los puntos de la tabla en una cuadrícula.
 - a. Traza una recta que se ajuste a los puntos tanto como sea posible. Trata de hacer una recta de manera que casi el mismo número de puntos quede en ambos lados de ésta. Una regla transparente o un trozo de espagueti seco te ayudará a hacer esto.
 - b. Escribe una ecuación de la recta que hiciste. Para hacer esto, calcula la pendiente y la intersección y de la recta o la pendiente y cualquier punto en la recta o dos puntos en la recta y usa esa información para escribir una ecuación.
2. Una técnica para mejorar el “ajuste” de tu recta es el uso de las medias de los datos.
 - a. Calcula la media del número de respiraciones por minuto y la media del número de latidos por minuto de los datos de la tabla.
 - b. Traza el punto de estas dos medias como sus coordenadas y ajusta la recta que hiciste en el Problema 1 para que pase a través de este punto.
3. Usa tu gráfica y escribe una ecuación para tu nueva recta. ¿Por qué podría ser diferente tu recta a la de alguien más?
4. Usa tu ecuación del Problema 3 para predecir el ritmo cardíaco de una persona que respira 35 veces por minuto, después de caminar 20 minutos. Compara tu predicción con las predicciones de otros alumnos.
5. Usa tu ecuación para predecir el ritmo cardíaco de una persona que respira 100 veces por minuto, después de caminar 20 minutos. ¿Crees que tu predicción es razonable? Explica.





El tiempo ganador para los 400 m en relevos ha disminuido constantemente desde 1928. En los juegos olímpicos del año 2000, el ganador de la medalla de oro, del equipo de las Bahamas, completó los relevos en 41.95 s.

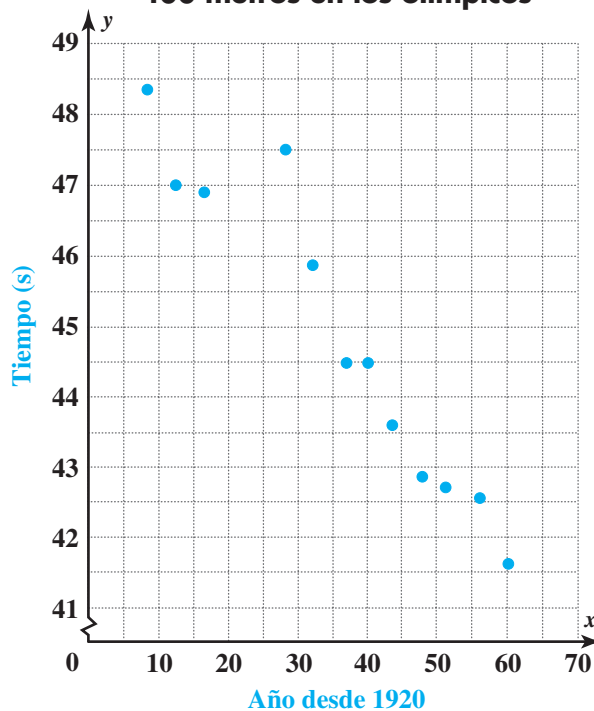
Serie de problemas F

La tabla muestra los tiempos ganadores para los 400 metros en relevos femeninos en los juegos olímpicos de 1928 a 1980. No hubo juegos en 1940 ó en 1944 debido a la Segunda Guerra Mundial.

Año	País	Tiempo (s)	Año	País	Tiempo (s)
1928	Canadá	48.4	1960	Estados Unidos	44.5
1932	Estados Unidos	46.9	1964	Polonia	43.6
1936	Estados Unidos	46.9	1968	Estados Unidos	42.8
1948	Holanda	47.5	1972	Alemania Occidental	42.81
1952	Estados Unidos	45.9	1976	Alemania Oriental	42.55
1956	Australia	44.5	1980	Alemania Oriental	41.60

A continuación se trazaron los datos. Los puntos están bastante cerca de caer en una recta, con una excepción. Cuando un punto de datos parece muy diferente a otros, con frecuencia se llama *valor atípico*. A los valores atípicos se les da menos énfasis cuando se analizan tendencias generales o patrones.

Relevos femeninos de 400 metros en los olímpicos



1. ¿Qué punto es el valor atípico?
2. ¿Puedes sugerir una razón del por qué ese punto está tan lejos de la tendencia de otros valores?
3. Copia los puntos de los datos en tu propia gráfica. Usando las técnicas que aprendiste en la Serie de problemas E, halla una ecuación para una recta que encaje con los datos.

Serie de problemas

Las calculadoras graficadoras usan una sofisticada técnica matemática para hallar rectas que se ajustan al conjunto de datos. Ahora, usarás tu calculadora graficadora para hallar una recta de óptimo ajuste.

1. Entra en tu calculadora, en dos listas, los datos de los 400 metros en relevos de la Serie de problemas F.
 - a. Usa tu calculadora para determinar la ecuación de una recta de óptimo ajuste.
 - b. ¿Se parece o no la ecuación de la calculadora a la ecuación que encontraste en la Serie de problemas F?
2. Los tiempos ganadores en la tabla de la página 54 han disminuido constantemente con los años. ¿Crees que continuará esta tendencia? Explica tu respuesta.
3. Usa tu ecuación del Problema 1 para predecir los tiempos ganadores para 1984, 1988, 1992 y 1996.
4. A continuación, se muestran los tiempos ganadores reales para estos años. ¿En qué se parecen a tus predicciones?

Año	1984	1988	1992	1996
Tiempo (s)	41.65	41.98	42.11	41.95

5. Supón que los tiempos ganadores en realidad continuaron disminuyendo después de 1980, a la misma tasa que predice tu modelo lineal del Problema 1.
 - a. Escribe una ecuación que puedas usar para hallar cuándo será 0 segundos el tiempo ganador. Resuelve tu ecuación.
 - b. ¿Según tu modelo, en qué año predices que ocurrirá este imposible tiempo ganador de 0 segundos?

Comparte resume

Acabas de examinar dos situaciones que se pueden modelar con ecuaciones lineales. Haz una gráfica que contenga 10 puntos para los cuales una ecuación lineal *no* sería un buen modelo. Describe por qué tendrías dificultades en determinar una recta de óptimo ajuste para tu gráfica.

Ejercicios por tu cuenta

Practica & aplica

Para cada conjunto de ecuaciones, indica qué tienen en común las gráficas de todas las cuatro relaciones, *sin* hacer las gráficas. Explica tus respuestas.

1. $y = -1.1x + 1.5$

$$y = -1.1x - 4$$

$$y = -1.1x + 7$$

$$y = -1.1x$$

2. $y = 2x$

$$y = -2x$$

$$y = 3x$$

$$y = -3x$$

3. $y = 2x$

$$y - 1 = 2x$$

$$y = 2x + 4$$

$$y = 2x + 7$$

4. $y = 1 - x$

$$y = 1 - 2x$$

$$y = 1 - 3x$$

$$y = 1 - 4x$$

5. En este ejercicio, aplicarás lo que has aprendido acerca de escribir ecuaciones para rectas paralelas.

a. Escribe tres ecuaciones cuyas gráficas sean rectas paralelas con pendientes positivas. Escribe las ecuaciones de manera que las gráficas estén igualmente espaciadas.

b. Grafica las rectas y verifica que sean paralelas.

c. Escribe tres ecuaciones cuyas gráficas sean rectas paralelas con pendientes negativas y estén igualmente espaciadas.

d. Grafica las rectas y verifica que sean paralelas.

6. Puedes saber si un punto en particular podría quedar sobre una recta al graficarla y ver si es posible que esté sobre la recta. Pero para saber con certeza si un punto en particular está sobre una recta, no sólo *cerca* de ella, debes probar si las coordenadas satisfacen la ecuación para esa recta.

a. Grafica la ecuación $y = \frac{13}{8}x - 3$.

b. Usando solo la gráfica, decide cuáles de los siguientes puntos parecieran estar sobre la recta. Traza los puntos.

(0, -3) (3, 2) (4, 4) (5, 5) (8, 10)

c. Para cada punto, reemplaza las coordenadas en la ecuación y evalúa para determinar si el punto satisface la ecuación. ¿Cuáles puntos, si los hay, están sobre la recta?



Si es posible, escribe cada ecuación en la forma $y = mx + b$. Después, identifica la pendiente y la intersección y .

7. $y = 5x + \frac{1}{3}(6x + 12)$

8. $y = \frac{1}{5}(10x + 5) - 5 + 7x$

9. $3x + 2(x + 1) = -\frac{1}{2}(4x + 6) + y$

10. $3x^2 - y = 3x + 5$

11. $y - 19 = -2(x - 3)$

12. Dentro de estas ecuaciones hay cinco pares de rectas paralelas. Identifica las rectas paralelas y da la pendiente de cada par.

a. $y = 3x - 5(x + 3)$

b. $\frac{x - 2y}{2} = 7$

c. $y = 17 - 3(3 + x) + x$

d. $3x + 2y = 4$

e. $y = -\frac{x}{2} + 2\left(6 - \frac{x}{2}\right)$

f. $x - y + 3 = 0$

g. $4x - 2y - 17 = 20$

h. $4\left(\frac{y}{2} - x\right) = 10$

i. $y + x = 4x + 5 - 2(4 + x)$

j. $y = \frac{3x + 4}{2} - \frac{7 + 2x}{2}$

13. Da la forma pendiente-intersección de cada ecuación e indica cuáles de estas ocho ecuaciones describen la misma relación.

a. $4x - 2y = 4$

b. $2y - 4x = 4$

c. $2x - y = 2$

d. $y - 2x = 2$

e. $y - 2x = -2$

f. $y = 2x - 2$

g. $y = 2x + 2$

h. $4x + 2y = 4$

¿Cuántos conjuntos de rectas paralelas puedes hallar en esta casa diseñada por el famoso arquitecto Frank Lloyd Wright?

- 14. Ciencias biológicas** Enseguida se menciona la duración promedio de gestación o embarazo y el tiempo de vida promedio de varios animales.

Animal	Gestación promedio (días)	Promedio de tiempo de vida (años)
Caballo	336	23
Cabra	151	12
Conejillo de indias	68	3
Elefante	624	35
Gato	63	11
Hámster	16	2
Mula	365	19
Pato	28	10
Perro	63	11
Pollo	22	8
Vaca	280	11

- Traza los puntos para cada animal en uno de los conjuntos de ejes. Coloca la gestación en el eje horizontal y tiempo de vida en el eje vertical.
- Haz una recta que se ajuste razonablemente bien a los datos. Escribe una ecuación para tu recta.
- Usa tu ecuación para predecir el tiempo de vida de un cerdo, que tiene una gestación de casi 114 días.

- 15. Bellas artes** El genio Wolfgang Amadeus Mozart compuso música durante la mayor parte de su corta vida. Sus composiciones fueron enumeradas en el orden en que las escribió.

Estos datos relacionan el número total de composiciones, K , con la edad de Mozart cuando las escribió, a .

Edad (años), a	8	12	16	20	24	27	32	35
Número total de composiciones, K	16	45	133	250	338	425	551	626

- Grafica los puntos de la tabla, con a en el eje horizontal y K en el eje vertical.
- ¿Sugieren los datos una tasa general a la cual Mozart escribió nuevas composiciones? ¿Cuál es esa tasa?
- Traza una recta que se ajuste a los puntos de los datos, tanto como sea posible. Usa la técnica para hallar una recta que pase a través de la media de la edad y la media del número de composiciones para los puntos de datos dados.



La letra K se usa para la variable numérica de composición en honor al científico austriaco Ludwig von Köchel, quien clasificó las 626 composiciones a mediados del siglo XIX.

- d. Usa tu gráfica para hallar una ecuación lineal y predecir el número de composiciones que Mozart escribió a esa edad.
- e. Mozart murió muy joven, a los 35 años de edad. ¿Sería razonable usar tu ecuación para predecir el número de composiciones que Mozart hubiera producido de haber vivido hasta la edad de 70 años?
- f. ¿Cuál es el valor de K para $a = 0$? ¿Tienen sentido estos datos? ¿Qué te indica esto acerca de tu modelo lineal?

16. Todas las rectas para estas tres ecuaciones pasan a través de un punto común.

$$y = \frac{x}{2} - 1 \quad y = -\frac{2x}{3} + 6 \quad y = -\frac{x}{6} + 3$$

- a. Haz gráficas para las tres ecuaciones y halla el punto común.
- b. Verifica que el punto que hallaste satisfaga las tres ecuaciones reemplazando las coordenadas x y y en cada ecuación.

Cada tabla describe una relación lineal. Para cada relación, calcula la pendiente de la recta y la intersección y . Después, escribe una ecuación para la relación en la forma $y = mx + b$.

17.

x	2	4	6	8	10
y	8	12	16	20	24

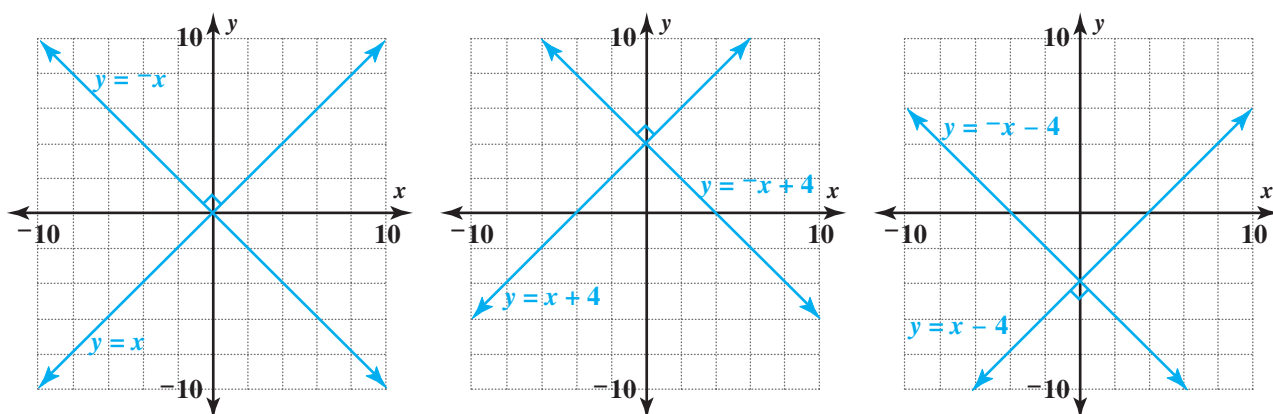
18.

x	-8	-3	3	5	10
y	26	11	-7	-13	-28

19.

x	9	7	5	3	1
y	5	4	3	2	1

- 20.** Hoshi hizo gráficas para $y = x$ y $y = -x$ y notó que las rectas se cruzaron en ángulos rectos en el punto $(0, 0)$. Después, hizo gráficas de $y = x + 4$ y $y = -x + 4$ y notó que las rectas se cruzaron otra vez en ángulos rectos, en esta ocasión en el punto $(0, 4)$. Probó un par más, $y = x - 4$ y $y = -x - 4$. Otra vez las rectas se cruzaron en ángulos rectos, en el punto $(-4, 0)$.



Hoshi hizo esta conjetura: “Cuando graficas dos ecuaciones lineales y una tiene una pendiente que es la negativa de la otra, siempre obtienes un ángulo recto”.

- ¿Estás de acuerdo con la conjetura de Hoshi? Explica tu respuesta.
 - Traza varios pares de rectas más que se ajusten a las condiciones de la conjetura de Hoshi, con diferentes valores de pendiente. ¿Prueban o refutan tus dibujos la conjetura de Hoshi?
 - Si crees que la conjetura de Hoshi es falsa, ¿dónde crees que cometió el error?
- 21.** Repasa la Serie de problemas C. Algunas de las ecuaciones dadas no son lineales. Escribe algunas pautas para identificar rápidamente ecuaciones lineales y no lineales.

En tus propias palabras

Describe por qué sería útil determinar la recta de óptimo ajuste al trabajar con datos.

Así como la intersección y de una recta es el valor y , en el cual la recta cruza el eje y , la intersección x es el valor en el cual la recta cruza el eje x . En los Ejercicios 22 al 25, halla la ecuación de una recta con la intersección x y pendiente dadas.

- intersección x 3, pendiente 2
- intersección x -2 , pendiente $-\frac{1}{2}$
- intersección x 1, pendiente -6
- Reto** Intersección x , 3; sin pendiente (Ayuda: Si la pendiente es $\frac{\text{altura}}{\text{carrera}}$, ¿cuándo no habría pendiente?)

- 26.** Has estado usando la forma $y = mx + b$ para representar ecuaciones lineales. Las ecuaciones lineales a veces se representan en la forma $Ax + By = C$, donde A , B y C son constantes.
- Vuelve a plantear la ecuación $Ax + By = C$ en la forma $y = mx + b$. Para hacer esto, necesitarás expresar m y b en términos de A , B y C .
 - ¿Cuál es la pendiente de una recta con ecuación en la forma $Ax + By = C$? ¿Cuál es la intersección y ?
- 27. Estudios sociales** A continuación, aparecen los datos de la población mundial para los años de 1950 a 1990.

Población mundial

Año	Población (billones)
1950	2.52
1960	3.02
1970	3.70
1980	4.45
1990	5.29

- Traza los puntos en una gráfica con “Años desde 1900” en el eje horizontal y “Población (en billones)” en el eje vertical. Trata de ajustar una recta a los datos.
- Escribe una ecuación que se ajuste a tu recta.
- Usa tu ecuación para proyectar la población mundial para el año 2010, el cual es 110 años después de 1900.
- ¿Qué indica tu ecuación acerca de la población mundial en 1900? ¿Tiene sentido esto? Explica.
- Según las cifras de las Naciones Unidas, la población mundial en 1900 era de 1.65 billones. La NU predijo que la población mundial en el año 2010 será de 6.79 billones. ¿Son diferentes los datos de 1900 y 2010 a los de tus predicciones? ¿Cómo justificas tu respuesta?

28. Considera este conjunto de datos.

x	0	2	4	6	8
y	2	20	6	8	10

- Grafica el conjunto de datos.
- Un punto es un valor atípico. ¿Cuál es este punto?
- Calcula la media de los valores de x y la media de los valores de y .
- Trata de hallar una recta que se ajuste bien a los datos y que pase por el punto (media de los valores de x , media de los valores de y). Escribe una ecuación para tu recta.
- Ahora, calcula la media de las variables, *ignorando el valor atípico*. En otras palabras, no incluyas los valores del valor atípico en tus cálculos.
- Trata de hallar una nueva recta que se ajuste bien a los datos, usa las medias que calculaste en la Parte e para el punto (media de los valores de x , media de los valores de y). Escribe una ecuación para tu recta.
- ¿Crees que cualquier recta se podría considerar de óptimo ajuste para los datos? Explica.

Repaso mixto

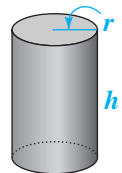
29. Cada uno de los siguientes puntos satisface una de las ecuaciones. Relaciona cada ecuación con un punto.

$(-1, 1)$ $(7, 0)$ $(-1, -1)$ $(10, 1)$ $(-2, 0)$ $(-1, 0.9)$

- $y = 2x - 14$
- $y = x^2 - 4$
- $y = 0.1x + x^2$
- $y = x^3$
- $y = -x^3$
- $y = x^2 - 99$

30. **Geometría** La fórmula para el volumen de un cilindro se obtiene multiplicando el área de la base del cilindro, πr^2 , por la altura del cilindro, h :

$$\text{Volumen} = \pi r^2 h$$



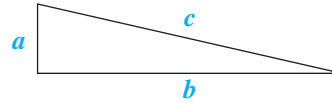
Usa esta fórmula para calcular el valor de cada variable.

a.
Volumen = 8π

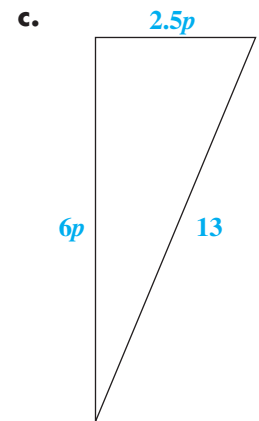
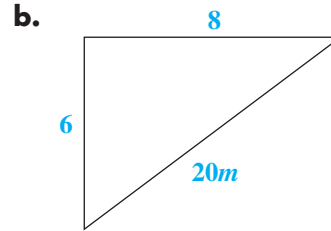
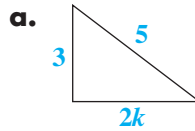
b.
Volumen = 108π

c.
Volumen = 0.125π

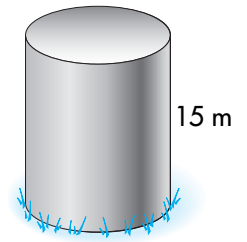
- 31. Geometría** El teorema de Pitágoras establece que si a y b son las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo y c es la hipotenusa (el lado más largo), entonces, $a^2 + b^2 = c^2$.



Usa el teorema de Pitágoras para calcular el valor de cada variable.



- 32. Ciencias** Los ingenieros civiles están diseñando un tanque de almacenamiento para el sistema de aguas de una pequeña comunidad. El tanque tendrá forma de cilindro y medirá 15 metros de altura. Tratan de determinar el mejor tamaño para el radio del tanque.

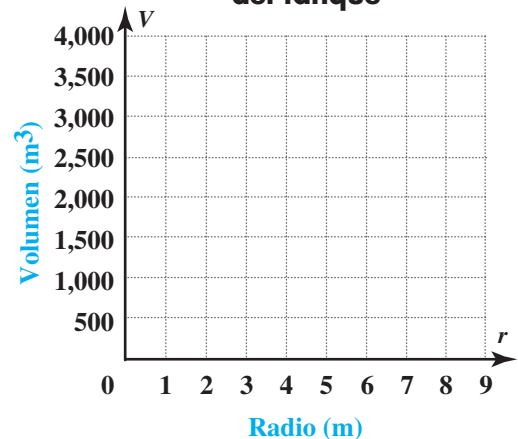


- a.** Llena una tabla como la siguiente para el volumen del tanque de almacenamiento para cada uno de los radios dados.

Radio (m)	4	5	6	7	8	9
Volumen (m ³)						

- b.** Traza los puntos de tu tabla en una cuadrícula como ésta.
- c.** Usa tu gráfica para estimar cuál debería ser el radio del tanque, si el tanque almacenará 3,500 m³ de agua.

Especificaciones del tanque



Recuerda

La fórmula para el volumen de un cilindro es $\pi r^2 h$, donde r es el radio de la base circular y h es la altura.

VOCABULARIO

coeficiente
directamente
proporcional
forma pendiente-
intersección
intersección y
pendiente
relación lineal
variación directa

Resumen del capítulo

En este capítulo, analizaste *relaciones lineales*, relaciones con gráficas de líneas rectas. Investigaste ejemplos para aumentar y disminuir relaciones lineales. En algunos casos, estas relaciones fueron *variaciones directas* o relaciones *directamente proporcionales*.

Exploraste la conexión entre la forma $y = mx + b$ de una ecuación lineal y su gráfica. Hallaste que el *coeficiente*, m , representa la *pendiente* de la recta. La constante, b , llamada la *intersección* y , indica dónde cruza el eje y la recta.

Aprendiste a hallar la ecuación de una recta a partir de diferentes tipos de información dada: una descripción escrita, una tabla de valores, una gráfica, la pendiente y uno o dos puntos en la recta. Finalmente, viste que si los datos trazados muestran una tendencia lineal, puedes ajustar una recta a los datos y usar la recta o su ecuación para hacer predicciones.

Estrategias y aplicaciones

Las preguntas en esta sección te ayudarán a repasar y a aplicar las ideas importantes y estrategias desarrolladas en este capítulo.

Reconoce y escribe relaciones lineales

En las Preguntas 1 a la 6, indica cuáles de las siguientes descripciones se ajustan a la relación y explica cómo lo decidiste:

- una variación directa
- lineal pero no una variación directa
- no lineal

1. Aisha pagó \$2.50 de entrada a una feria y \$1.25 por cada juego mecánico. Considera la relación entre el total que gastó en la entrada y los juegos, y el número de juegos a los que se subió.



2. La compañía de préstamo Scrooge cobra una multa de \$10 la primera vez que un prestatario se atrasa en hacer un pago. La multa es de \$20 la segunda vez que se atrasa en el pago, \$40 para el tercer pago con retraso, y así sucesivamente, duplicando la cantidad para cada pago atrasado. Considera la relación entre la multa total y el número de pagos atrasados.

3. $d = 65t$

4. $y = 13 - 12x$

5.

x	0	10	20	30	40	50	60
y	5	55	105	155	205	255	305

6.

x	40	30	20	15	10	5	0
y	184	138	92	69	46	23	0

Comprende la conexión entre una ecuación lineal en la forma $y = mx + b$ y su gráfica

7. Considera la ecuación $y = 300 - 25x$.
- ¿Cómo se afectaría la gráfica de esta ecuación si se cambiara -25 a -30 ?
 - ¿Cómo se afectaría la gráfica de esta ecuación si se cambiara -25 a -20 ?
 - ¿Cómo se afectaría la gráfica de esta ecuación si se cambiara -25 a 25 ?
 - ¿Cómo se afectaría la gráfica de esta ecuación si se cambiara 300 a -100 ?

Comprende y aplica la idea de pendiente

Determina si los puntos en cada conjunto son colineales. Explica cómo lo sabes.

- $(-2, 8), (\frac{1}{3}, 1), (5, -13)$
- $(2, \frac{7}{2}), (6, 6), (-3, \frac{3}{2})$
- $(-6, -3), (8, \frac{5}{3}), (0, -1)$
- Halla una ecuación de la recta que pasa por el punto $(-4, 1)$ y es paralela a la recta $y = -3x + 1$.

Usa una gráfica lineal para recoger información o hacer predicciones

- 12.** Hay una relación lineal entre la temperatura en grados Fahrenheit y la temperatura en grados Celsius. Dos temperaturas equivalentes son $0^{\circ}\text{C} = 32^{\circ}\text{F}$ y $30^{\circ}\text{C} = 86^{\circ}\text{F}$.
- a.** Haz una gráfica de cuatro cuadrantes de esta relación y traza los puntos $(0, 32)$ y $(30, 86)$. Une los puntos con una recta.
 - b.** Usa la recta que une los dos puntos para convertir estas temperaturas.
 - i.** 5°F
 - ii.** 20°C
 - iii.** -30°C

Ajusta las rectas a los datos

- 13.** Cada día durante una semana, Lemeka hizo lagartijas y contó cuántas lagartijas podía hacer en cierto número de segundos. Agregó 10 segundos al tiempo todos los días.

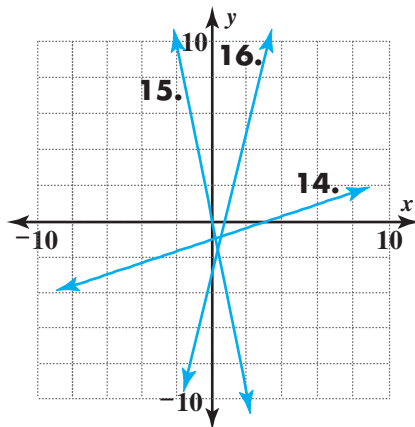


Segundos	10	20	30	40	50	60	70
Lagartijas	15	25	44	35	42	50	55

- a.** Grafica los datos.
- b.** ¿Parecen ser aproximadamente lineales los datos?
- c.** ¿Hay valores atípicos en los datos, puntos que no parecen ajustarse a la tendencia general de los datos? Si así es, ¿cuál o cuáles son?
- d.** Traza una recta que se ajuste a los datos tan bien como sea posible y halla una ecuación de tu recta.
- e.** Usa tu ecuación o gráfica para predecir cuántas lagartijas habrá hecho Lemeka cuando llegue a los 2 minutos.

Demuestra tus destrezas

En las Preguntas 14 a la 16, estima la pendiente de la recta.



Calcula la pendiente de la recta que pasa a través de cada par de puntos dados.

- 17. $(5, -3)$ y $(-1, 9)$
- 18. $(3, 4)$ y $(-1, -2)$
- 19. $(-6, -4)$ y $(-2, 5)$
- 20. Halla una ecuación de la recta que tiene una pendiente -2 y pasa a través del punto $(-1, -1)$.
- 21. Halla una ecuación de la recta que pasa a través de los puntos $(4, 4)$ y $(8, -2)$.
- 22. Identifica las ecuaciones que representan rectas paralelas.
 - a. $y = 3x + 1$
 - b. $y = \frac{1}{2}x - 1$
 - c. $\frac{1}{2}y = 3 + \frac{1}{2}x$
 - d. $y = -x + 2$
 - e. $y = 2x(1 - x)$
 - f. $y = 2x + (1 - x)$
 - g. $3y = 1 - 3x$
 - h. $-4y = 2x$
 - i. $y = \frac{1}{2}x - x - 1$

Vuelve a plantear cada ecuación en la forma pendiente-intersección.

- 23. $y - x - 1 = 2x + 1$
- 24. $2(y - 1) = 3x + 1$
- 25. $1 - y = x + 2(1 - x)$